

# Théorème fondamental de l'arithmétique

(134) Soit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

- 1] On suppose que  $n$  admet exactement 9 diviseurs positifs.
  - a] Montrer que  $n$  s'écrit:  $n = a^8$  ou  $n = a^2 b^4$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres premiers positifs distincts.
- 2] On suppose que  $n$  admet exactement 9 diviseurs positifs et que  $n = 39p + 1$  où  $p$  est premier.
  - a] Montrer que  $n$  ne peut pas s'écrire sous la forme  $a^8$  avec  $a$  premier.
  - b] Montrer que:  $p \in \{5; 37; 41\}$
  - c] Déterminer les entiers naturels  $n$  qui vérifient les conditions de la question 2].

## Solution

On rappelle que si  $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_N^{r_N}$  est la décomposition en produit de facteurs premiers (où  $p_1, p_2, \dots, p_N$  sont des nombres premiers deux à deux distincts, et  $r_1, r_2, \dots, r_N$  sont des entiers naturels non nuls), alors le nombre de diviseurs positifs de  $n$  est:

$$(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_N)$$

- 1]  $n$  admet 9 diviseurs naturels.
 

9 s'écrit:  $9 = (1+8)$  ou  $9 = (1+2)(1+2)$

Donc:  $n = a^8$ , où  $a$  est premier  
ou  $n = a^2 b^4$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres premiers distincts.

- 2] On suppose que  $n$  admet 9 diviseurs naturels et que  $n = 39p + 1$  où  $p$  est premier.
  - a] Raisonnons par l'absurde. Supposons que  $n = a^8$  où  $a$  est un nombre premier. Comme  $n = 39p + 1$ , alors  $a^8 = 39p + 1$  ( $p$  premier). Donc:  $a^8 - 1 = 39p$  c'est-à-dire:  $(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1) = 3 \times 13 \times p$  Comme  $a$  est premier, alors:  $a+1 > 1$ ,  $a^2+1 > 1$  et  $a^4+1 > 1$  Donc:  $a-1 = 1$ , c'est-à-dire:  $a = 2$  Et on a:  $2^8 = 256 \equiv 25 \pmod{39}$ ; ce qui contredit le fait que  $a^8 = 39p + 1$ . Donc, le nombre  $n$  ne peut pas s'écrire sous la forme  $a^8$  où  $a$  est premier.
  - b] D'après ce qui précède,  $n = a^2 b^4$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres premiers distincts.

On a alors:  $a^2 b^4 = 39p + 1$

Donc:  $(a^2-1)(a^2+1) = 3 \times 13 \times p$

Comme:  $5 \leq a^2-1 < a^2+1$ , alors:

$$\begin{cases} a^2-1 = 39 \\ a^2+1 = p \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2-1 = p \\ a^2+1 = 39 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2-1 = 13 \\ a^2+1 = 3p \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} p = 41 \\ a^2 = 40 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 37 \\ a^2 = 38 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p = 5 \\ a^2 = 14 \end{cases}$$

Donc:  $p = 5$  ou  $p = 37$  ou  $p = 41$ .

c] 1<sup>er</sup> cas:  $p = 5$

On a:  $n = 39 \times 5 + 1 = 196 = 2^2 \times 7^2$

2<sup>e</sup> cas:  $p = 37$

On a:  $n = 39 \times 37 + 1 = 1444 = 2^2 \times 19^2$

3<sup>e</sup> cas:  $n = 41$

On a:  $n = 39 \times 41 + 1 = 1600$  et  $1600 = 2^6 \times 5^4$   
 1600 ne vérifie la condition imposée car il possède  $(1+6)(1+4) = 21$  diviseurs.

Conclusion

Les entiers naturels  $n \geq 2$  qui ont 9 diviseurs et qui s'écrivent  $n = 39p + 1$  où  $p$  est premier sont 196 et 1444.

(135) Soit  $p$  un nombre premier positif. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

- 1] a] On sait que:  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$  les multiples de  $p$  dans ce produit sont  $p, 2p, \dots, n/p$ . Montrer que:  $n_p = E(\frac{n}{p})$
- b] Montrer que l'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $n!$  en produit de facteurs premiers est:  $\sum_{r \geq 1} E(\frac{n}{p^r})$  c'est-à-dire  $E(\frac{n}{p}) + E(\frac{n}{p^2}) + \dots + E(\frac{n}{p^k})$ , où  $k$  est un entier naturel non nul que l'on déterminera.
- 2] a] Quel est le nombre de zéros par lesquels se termine  $100!$ ?
- b] Montrer que:  $\left[ \frac{(m+n)!}{m!n!} \right] \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$   $\frac{(2m)!}{m!m!} \in \mathbb{N}$ .

## Solution

- 1] a] Le nombre de facteurs de  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$  qui s'écrivent  $\lambda p$  est  $n_\lambda$  tel que:  $n_\lambda p \leq n < (n_\lambda + 1)p$ , c'est-à-dire  $n_\lambda \leq \frac{n}{p} < n_\lambda + 1$  Donc:  $n_\lambda = E(\frac{n}{p})$ .
- b] L'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $n$  en facteurs premiers est le même que celui







136 Soit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

On désigne par  $d(n)$  le nombre de diviseurs positifs de  $n$ , et par  $\pi(n)$  le produit des diviseurs positifs de  $n$ .

1] Montrer que :  $\pi(n) = \frac{1}{2} d(n)$

2] Déterminer  $n$  pour que :  $\pi(n) = (12)^{15}$

### Solution

On suppose que la décomposition de  $n$  en produit de facteurs premiers est  $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_N^{r_N}$  où  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_N$  sont des nombres premiers positifs deux à deux distincts, et où  $r_1, r_2, \dots, r_N$  sont des entiers naturels non nuls.

On a :  $d(n) = (1+r_1)(1+r_2) \dots (1+r_N)$

1] - Les diviseurs positifs de  $n$  sont les nombres  $p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_N^{d_N}$  où  $d_1, d_2, \dots, d_N$  sont des entiers tels que :

$$0 \leq d_1 \leq r_1, 0 \leq d_2 \leq r_2, \dots, 0 \leq d_N \leq r_N$$

• le nombre de diviseurs de  $n$  qui s'écrivent

$$p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_N^{d_N} \text{ est } (1+r_1) \dots (1+r_N)$$

le nombre de diviseurs de  $n$  qui s'écrivent

$$p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_N^{d_N} \text{ est } (1+r_1) \dots (1+r_N)$$

le nombre de diviseurs de  $n$  qui s'écrivent

$$p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_N^{d_N} \text{ est } (1+r_1) \dots (1+r_N)$$

Donc l'exposant de  $p_1$  dans la décomposition de  $\pi(n)$  en produit de facteurs premiers

$$\text{est : } (1+0 + \dots + r_1) \times (1+r_2) \dots (1+r_N)$$

De même, l'exposant de  $p_2$  dans la

$$\text{décomposition de } \pi(n) \text{ en produit de facteurs premiers est : } (1+0 + \dots + r_2) \times (1+r_1) \dots (1+r_N)$$

Par ailleurs, l'exposant de  $p_N$  dans la décomposition de  $\pi(n)$  en produit de facteurs premiers est

$$(1+0 + \dots + r_N) \times (1+r_1) \dots (1+r_{N-1})$$

Donc, pour  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ , l'exposant de

$p_k$  dans la décomposition de  $\pi(n)$  en produit de facteurs premiers est :

$$(1+0 + \dots + r_k) \frac{d(n)}{1+r_k}$$

$$\text{Donc : } \pi(n) = \prod_{k=1}^N p_k^{(1+0 + \dots + r_k) \frac{d(n)}{1+r_k}}$$

$$\text{Comme } 1+0 + \dots + r_k = \frac{r_k(1+r_k)}{2}, \text{ alors}$$

$$(1+0 + \dots + r_k) \frac{d(n)}{1+r_k} = \frac{1}{2} r_k d(n)$$

$$\text{Donc } \pi(n) = \prod_{k=1}^N p_k^{\frac{1}{2} r_k d(n)} = (p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_N^{r_N})^{\frac{1}{2} d(n)}$$

$$\text{Où : } \pi(n) = n^{\frac{1}{2} d(n)}$$

$$2] \text{ On a : } (12)^{15} = 2^{30} \times 3^{15}$$

$$\text{Donc : } \pi(n) = (12)^{15} \text{ implique qu'il existe } (r_1, r_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que : } n = 2^{r_1} \times 3^{r_2}$$

$$\text{Soit } (r_1, r_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

$$\text{On a : } d(2^{r_1} \times 3^{r_2}) = (1+r_1)(1+r_2)$$

$$\text{et } \pi(2^{r_1} \times 3^{r_2}) = (2^{r_1} \times 3^{r_2})^{\frac{1}{2}(1+r_1)(1+r_2)}$$

Donc :

$$\pi(2^{r_1} \times 3^{r_2}) = (12)^{15} \Leftrightarrow (2^{r_1} \times 3^{r_2})^{\frac{1}{2}(1+r_1)(1+r_2)} = (2^{30} \times 3^{15})^1$$

$$\pi(2^{r_1} \times 3^{r_2}) = (12)^{15} \Leftrightarrow 2^{r_1(1+r_1)(1+r_2)/2} \times 3^{r_2(1+r_1)(1+r_2)/2} = 2^{60} \times 3^{30}$$

Donc :

$$\pi(2^{r_1} \times 3^{r_2}) = (12)^{15} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1(1+r_1)(1+r_2) = 60 \\ (1+r_1)r_2(1+r_2) = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 24 \\ 1(1+1)(1+24) = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 4 \text{ et } 1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \pi(n) = (12)^{15} \Leftrightarrow n = 2^4 \times 3^1 = 144$$

137 A. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , on désigne par  $\sigma(x)$  la somme des diviseurs positifs de  $x$ .

Soit  $P$  l'ensemble des nombres premiers positifs.

1] Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in P$ , on a :

$$\sigma(p^n) = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$$

2] Soit  $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_N^{r_N}$  la décomposition de  $x$  en produit de facteurs premiers.

$$\text{Montrer que : } \sigma(x) = \prod_{k=1}^N \frac{p_k^{r_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

3] Montrer que pour  $(x, y) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$  :

$$x \wedge y = 1 \Rightarrow \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$$

B. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $\sigma(n) = 2n$  et  $n$  pair.

1] Montrer qu'il existe  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :  $n = 2^a \times b$  et  $b$  impair.

2] Montrer qu'il existe un entier naturel  $c$  tel que :  $b = (2^{a+1} - 1)c$  et  $\sigma(b) = 2^{a+1}c$ .

3] Montrer que  $c = 1$

4] On déduit que  $2^{a+1} - 1$  est premier puis qu'il existe  $p \in P$  tel que :  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ .

### Solution



1] Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{P}$ .  
 les diviseurs positifs de  $p^n$  sont:  $1, p, p^2, \dots, p^n$   
 Comme  $p \geq 2$ , alors  $p \neq 1$ .

On a:  $\sigma(p^n) = 1 + p + p^2 + \dots + p^n$

Donc:  $\sigma(p^n) = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$

2] On a:  

$$\prod_{k=1}^N \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1} = \prod_{k=1}^N (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{n_k})$$

$$= (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{n_1}) \dots (1 + p_N + p_N^2 + \dots + p_N^{n_N})$$

$$= \sum_{\substack{0 \leq d_1 \leq n_1 \\ \vdots \\ 0 \leq d_N \leq n_N}} p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_N^{d_N}$$

Donc:  $\prod_{k=1}^N \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1} = \sum_{d \in \mathcal{D}_x} d$

où  $\mathcal{D}_x$  est l'ensemble des diviseurs positifs de  $x$

Donc:  $\sigma(x) = \prod_{k=1}^N \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1}$

3] Soit  $(x, y) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$ .

On suppose que:  $x \wedge y = 1$

Soit  $x = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_N^{n_N}$  et  $y = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_M^{s_M}$   
 les décompositions de  $x$  et  $y$  en produit de facteurs premiers, où  $p_1, p_2, \dots, p_N$  et  $q_1, q_2, \dots, q_M$  sont des nombres premiers deux à deux distincts.

Alors  $xy = (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_N^{n_N}) (q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_M^{s_M})$   
 est la décomposition de  $xy$  en produit de facteurs premiers.

D'après le résultat de 2], on a:

$$\sigma(xy) = \left( \frac{p_1^{n_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \dots \times \frac{p_N^{n_N+1} - 1}{p_N - 1} \right) \left( \frac{q_1^{s_1+1} - 1}{q_1 - 1} \times \dots \times \frac{q_M^{s_M+1} - 1}{q_M - 1} \right)$$

Donc:  $\sigma(xy) = \sigma(x) \sigma(y)$ .

Ainsi: Pour  $x \wedge y = 1$ , on a:

$$\sigma(xy) = \sigma(x) \sigma(y)$$

4. Soit cette partie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n$  est pair et  $\sigma(n) = 2n$

1] Soit  $a$  l'ensemble des  $d$  dans la décomposition de  $n$  en produit de facteurs premiers:

$a$  est le plus grand entier naturel tel que  $2^a$  divise  $n$ .

Il existe un entier impair  $b$  tel que  $n = 2^a b$ .

Ainsi, il existe un entier naturel non nul  $a$  et un entier impair  $b$  tel que  $n = 2^a b$

2] Comme  $\sigma(n) = 2n$ , alors:  $\sigma(2^a b) = 2^{a+1} b$

Comme  $b$  est impair, alors:  $2 \nmid b = 1$

et par suite:  $2^a \nmid b = 1$ .

D'après le résultat de A.3], on a:

$$\sigma(2^a b) = \sigma(2^a) \sigma(b)$$

Par ailleurs, d'après A.1], on a:

$$\sigma(2^a) = 2^{a+1} - 1.$$

Donc:  $\sigma(2^a b) = (2^{a+1} - 1) \sigma(b)$

Donc:  $(2^{a+1} - 1) \sigma(b) = 2^{a+1} b$

On en déduit que:  $2^{a+1} - 1$  divise  $2^{a+1} b$

Comme  $(2^{a+1} - 1) \wedge 2^{a+1} = 1$ , alors d'après le théorème de Gauss:

$2^{a+1} - 1$  divise  $b$

Il existe donc  $c \in \mathbb{N}^*$  tel que:  $b = (2^{a+1} - 1) c$

Donc:  $\sigma(b) = 2^{a+1} c$ .

Par conséquent:

$$(\exists c \in \mathbb{N}^*) : b = (2^{a+1} - 1) c \text{ et } \sigma(b) = 2^{a+1} c.$$

3] Montrons que  $c = 1$

Raisonnons par l'absurde.

Supposons que  $c \geq 2$ .

On a:  $b = (2^{a+1} - 1) c$  et  $\sigma(b) = 2^{a+1} c$

Donc:  $\sigma(b) \geq 1 + b + (2^{a+1} - 1) c$

On aura:  $2^{a+1} c \geq 2^{a+1} c + 1$ ; ce qui est impossible.

D'où:  $c = 1$ .

4]. On a montré que:

$$n = 2^a b, \quad b = 2^{a+1} - 1 \text{ et } \sigma(b) = 2^{a+1}$$

Comme  $\sigma(2^{a+1} - 1) = 2^{a+1} = (2^{a+1} - 1) + 1$ ,

alors les deux diviseurs positifs uniques sont  $2^{a+1} - 1$  et 1.

Donc:  $(2^{a+1} - 1) \in \mathbb{P}$ .

On en déduit que:

$$(\exists a \in \mathbb{N}^*) : \begin{cases} n = 2^a (2^{a+1} - 1) \\ (2^{a+1} - 1) \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Donc:

Si  $n$  est un entier naturel non nul pair tel que  $\sigma(n) = 2n$ , alors:

il existe un nombre premier positif  $p$

$(p = 2^a + 1)$  tel que:

$$n = 2^{p-1} (2^p - 1)$$

Reste à établir que si  $2^a - 1$  est premier, alors  $a$  est nécessairement premier.

(À cet égard, voir l'exercice 115)



## Systèmes de numération

138 Calculer :

$$A = \overline{110110}_{(u)} + \overline{11011}_{(u)} ;$$

$$B = \overline{11101}_{(u)} - \overline{10011}_{(u)} ;$$

$$C = \overline{11001}_{(u)} \times \overline{1011}_{(u)}$$

Solution

$$\begin{array}{r} \overline{110110}_{(u)} \\ + \overline{11011}_{(u)} \\ \hline A = \overline{1010001}_{(u)} \end{array} ; \quad \begin{array}{r} \overline{11101}_{(u)} \\ - \overline{10011}_{(u)} \\ \hline B = \overline{1010}_{(u)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{11001}_{(u)} \\ \times \overline{1011}_{(u)} \\ \hline \overline{11001} \\ \overline{110010} \\ \overline{1100100} \\ \overline{11001000} \\ \hline C = \overline{100010011}_{(u)} \end{array}$$

139 Déterminer les entiers naturels  $x, y$  et  $z$  sachant que :

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)}$$

Solution

Comme  $x, y$  et  $z$  sont des chiffres du système de numération de base sept, alors  $x, y$  et  $z$  sont compris entre 0 et 6, avec  $x \neq 0$  et  $z \neq 0$ .

$$\text{On a : } \overline{xyz}_{(7)} = 7^2x + 7y + z = 49x + 7y + z$$

$$\overline{zyx}_{(11)} = 11^2z + 11y + x = 121z + 11y + x$$

$$\text{Donc : } \overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)} \Leftrightarrow x + 11y + 121z = 49x + 7y + z$$

$$\Leftrightarrow 120z + 4y - 48x = 0$$

$$\Leftrightarrow 30z + y - 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 6(2x - 5z)$$

$$\text{Donc : } \overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 6 \\ 6(2x - 5z) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 & \text{ou} & y = 6 \\ 2x = 5z & & 2x - 5z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Et on a : } 2x = 5z \Leftrightarrow (x = 5 \text{ et } z = 2)$$

$$\text{et } 2x - 5z = 1 \Leftrightarrow 2(x - 3) = 5(z - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 3 = 0 \text{ et } z - 1 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \text{ et } z = 1)$$

D'où :

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(11)} \Leftrightarrow \left( \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 1 \end{cases} \right)$$

140 Déterminer la valeur de l'entier naturel  $x$  tel que :

$$\overline{30407}_{(x)} = \overline{12551}_{(10)}$$

Solution

Comme 7 est un chiffre du système de numération de base  $x$ , alors :  $x > 7$ . On a :

$$\overline{30407}_{(x)} = \overline{12551}_{(10)} \Leftrightarrow 3x^4 + 4x^3 + 7 = 12551$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^3 = 12544$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 64)(3x^4 + 196) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 64$$

D'où :

$$\overline{30407}_{(x)} = \overline{12551}_{(10)} \Leftrightarrow x = 8$$

141 Soit  $x \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\overline{36}_{(x)} + \overline{45}_{(x)} = \overline{103}_{(x)}$$

Calculer  $\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)}$

Solution

On a nécessairement  $x > 6$

La relation  $\overline{36}_{(x)} + \overline{45}_{(x)} = \overline{103}_{(x)}$  équivaut à

$$(3x + 6) + (4x + 5) = x^2 + 3$$

c'est-à-dire à :

$$x^2 - 7x = 8$$

ou encore à :

$$x(x - 7) = 8$$

En utilisant les diviseurs de 8, on obtient :

$$\overline{36}_{(x)} + \overline{45}_{(x)} = \overline{103}_{(x)} \Leftrightarrow x = 8$$

On a :

$$\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = (3x + 6)(4x + 5) = 12x^2 + 39x + 30$$

Puisque  $x = 8$ , alors

$$\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = (3 \times 8 + 6)(4 \times 8 + 5) = 12 \times 8^2 + 39 \times 8 + 30$$

$$= (2 + 4) \times 8^2 + (4 \times 8 + 7) \times 8 + 3 \times 8 + 6$$

$$= x^3 + 8x^2 + (8 + 6)x + 6$$

$$= x^3 + x^3 + (x + 6)x + 6$$

$$\overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$$

$$\text{Donc : } \overline{36}_{(x)} \times \overline{45}_{(x)} = \overline{2166}_{(x)}$$

142 Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a \geq 3$

Montrer que les nombres entiers

$\overline{10201}_{(a)}$  et  $\overline{10101}_{(a)}$  ne sont pas premiers

Solution

On a :  $\overline{10201}_{(a)} = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 = (\overline{101}_{(a)})^2$   
et  $a^2 + 1 > 5$ . Donc :  $\overline{10201}_{(a)}$  n'est pas premier.



On a:  $\overline{10101}_a = a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 - a^2$

$\overline{10101}_a = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$

est on a:  $3 < a^2 - a + 1 < a^2 + a + 1$

Donc:  $\overline{10101}_a$  n'est pas premier

(143) Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a > 5$ .

Déterminer  $a$  sachant que:

$\overline{13054}_a = \overline{114}_a \times \overline{111}_a$

Solution

La relation  $\overline{13054}_a = \overline{114}_a \times \overline{111}_a$

équivalent successivement à:

$a^4 + 3a^3 + 5a + 4 = (a^2 + a + 4)(a^2 + a + 1)$

$a^4 + 3a^3 + 5a + 4 = a^4 + 2a^3 + 6a^2 + 5a + 4$

$a^2 - 6a^2 = 0$

$a^2(a - 6) = 0$

Comme  $a > 5$ , alors:  $a = 6$ .

(144) Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation

(E):  $\overline{(y-3)(x-1)}_x = \overline{(x-1)(y-3)}_y$

Solution

l'équation (E) est définie lorsque

$0 < y-3 < x$  et  $0 < x-1 < y$

c'est-à-dire lorsque:

$3 < y < x+3$  et  $2 < x < y+1$

• (E) équivaut à:

$(y-3)x + (x-1) = (x-1)y + (y-3)$

c'est-à-dire à:

$y = 2x - 1$

Comme  $3 < y < x+3$ , alors  $3 < 2x-1 < x+3$ .

Donc:  $2 < x < 4$ .

Il s'ensuit aussitôt que:  $x=3$  et par

suite:  $y=5$ .

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est  $S = \{(3; 5)\}$

Remarque: Il est facile de vérifier

que:  $\overline{21}_3 = \overline{12}_5 = 7$

(145) Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 6$ . On pose

$a_n = \overline{2310}_n$  et  $b_n = \overline{256}_n$

Déterminer, selon les valeurs de  $n$ ,

le p.g.d.c.  $\overline{d}_n = a_n \wedge b_n$ .

Solution

On a:  $a_n = 2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$

$b_n = 2n^2 + 5n + 2 = (n+2)(2n+1)$

On a:  $\overline{d}_n = n(n+1)(2n+1) \wedge (n+2)(2n+1)$

$\overline{d}_n = (2n+1)[n(n+1) \wedge (n+2)]$

On a:  $n(n+1) = (n+2)(n-1) + 2$

On en déduit que:

$n(n+1) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 2$

D'autre part:  $(n+2) \wedge 2 = n \wedge 2$ .

Donc:  $n(n+1) \wedge (n+2) = n \wedge 2$

Ainsi, on a:  $\overline{d}_n = (2n+1)(n \wedge 2)$

On a:  $\begin{cases} n \equiv 0[2] \Leftrightarrow n \wedge 2 = 2 \\ n \equiv 1[2] \Leftrightarrow n \wedge 2 = 1 \end{cases}$

• Conclusion:

Si  $n$  est pair,  $\overline{d}_n = 2(2n+1)$

Si  $n$  est impair,  $\overline{d}_n = 2n+1$

(145) 1] On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation:

(E):  $(x+1)^2 = 9+5y$

a) Montrer que si  $(x; y)$  est solution de (E),

alors:  $x \equiv 2[5]$  ou  $x \equiv 1[5]$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E).

c) Montrer que:

$(\forall k \in \mathbb{Z}) (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$

3] Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  le système

$\begin{cases} \overline{121}_x = \overline{59}_y \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

**BAL**

Solution

1] a) Noter que:  $(x+1)^2 \equiv 9[5] \Leftrightarrow x \equiv 2[5] \text{ ou } x \equiv 1[5]$

b) Soit  $S$  l'ensemble des solutions de (E)

• Si  $(x = 5k+1; k \in \mathbb{Z})$ , alors:

$9+5y = 25k^2 + 10k + 4$  et  $y = 5k^2 + 4k - 1$ .

• Si  $(x = 5k+2; k \in \mathbb{Z})$ , alors:

$9+5y = 25k^2 + 20k + 9$  et  $y = 5k^2 + 6k$ .

On démontre que:

$S = \{(5k+1; 5k^2 + 4k - 1) | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(5k+2; 5k^2 + 6k) | k \in \mathbb{Z}\}$

2] Noter que:  $5k^2 + 4k - 1 = 2(5k+1) + (3k-1)$

et que:  $5k+1 = (3k-1) \times 1 + (2k+2)$

puis que:  $3k-1 = (2k+2) \times 1 + (k-3)$

et que:  $2k+2 = 2(k-3) + 8$

3] On trouve que l'ensemble des solutions est

$T = \{(40\lambda + 16; 320\lambda^2 + 672\lambda + 55) | \lambda \in \mathbb{N}\}$



# Exercices du BAC

146] On considère dans  $\mathbb{Z}^6$  l'équation:

$$(E): 195x - 232y = 1.$$

a) Déterminer  $195 \wedge 232$ .

b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est:

$$S = \{(163 + 232k; 137 + 195k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

c) Déterminer l'entier naturel unique  $d$  qui vérifie:

$$0 \leq d \leq 232 \text{ et } 195d \equiv 1 [232]$$

d) Montrer que 233 est premier.

3] Soit  $A$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 232

Soit  $f$  l'application de  $A$  dans  $A$  définie par: Pour tout  $a$  de  $A$ ,  $f(a)$  est le reste de la division euclidienne de  $a^{195}$  par 233.

a) Montrer que:

$$(\forall a \in A \setminus \{0\}) a^{232} \equiv 1 [233]$$

b) Montrer que pour tout  $a$  et  $b$  de  $A$ :

$$\text{Si } f(a) = f(b), \text{ alors } a = b.$$

c) Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $A$  tels que:

$$f(a) = b. \text{ Déterminer } a \text{ en fonction de } b.$$

d) Montrer que  $f$  est bijectif puis déterminer la bijection réciproque  $f^{-1}$ .

## Solution

1] a) Utilisons l'algorithme d'Euclide.

$$\text{Posons: } \alpha = 232 \text{ et } \beta = 195$$

$$\textcircled{a} \text{ On a: } 232 = 1 \times 195 + 37$$

$$\text{Donc: } 232 \wedge 195 = 195 \wedge 37$$

$$\text{et } 37 = \alpha - \beta$$

$$\textcircled{b} \text{ On a: } 195 = 5 \times 37 + 10$$

$$\text{Donc: } 195 \wedge 37 = 37 \wedge 10$$

$$\text{et } 10 = \beta - 5(\alpha - \beta) = -5\alpha + 6\beta.$$

$$\textcircled{c} \text{ On a: } 37 = 3 \times 10 + 7$$

$$\text{Donc: } 37 \wedge 10 = 10 \wedge 7$$

$$\text{et } 7 = (\alpha - \beta) - 3(-5\alpha + 6\beta) = 16\alpha - 19\beta$$

$$\textcircled{d} \text{ On a: } 10 = 1 \times 7 + 3$$

$$\text{Donc: } 10 \wedge 7 = 7 \wedge 3$$

$$\text{et } 3 = (-5\alpha + 6\beta) - (16\alpha - 19\beta) = -21\alpha + 25\beta$$

$$\textcircled{e} \text{ On a: } 7 = 2 \times 3 + 1. \text{ Donc: } 7 \wedge 3 = 3 \wedge 1 = 1$$

$$\text{et } 1 = 16\alpha - 19\beta - 2(-21\alpha + 25\beta)$$

$$1 = 58\alpha - 69\beta.$$

On a montré que:  $\alpha \wedge \beta = 1$  et  $58\alpha - 69\beta = 1$ .

$$\text{Donc: } 232 \wedge 195 = 1$$

Remarques:

• On peut utiliser le théorème fondamental de l'arithmétique:

$$\text{On a: } 195 = 3 \times 5 \times 13 \text{ et } 232 = 2^3 \times 29$$

$$\text{D'où: } 195 \wedge 232 = 1.$$

• Le raisonnement par l'algorithme d'Euclide permet de trouver une solution particulière de l'équation (E)

$$\text{Comme: } 58 \times 232 - 69 \times 195 = 1, \text{ alors le couple } (-69, -58) \text{ est une solution de (E).}$$

$$\text{b) On a: } 195 \times 163 - 232 \times 137 = 31785 - 31784 = 1$$

Donc  $(163; 137)$  est une solution particulière de l'équation (E).

Soit  $S$  l'ensemble des solutions de (E).

Soit  $(x; y) \in \mathbb{Z}^6$ . On a:

$$195x - 232y = 1 \Leftrightarrow 195(x - 163) = 232(y - 137)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 232 \mid 195(x - 163) \\ 232(y - 137) = 195(x - 163) \end{cases}$$

Comme:  $232 \wedge 195 = 1$ , d'après le théorème de Gauss:

$$195x - 232y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 232 \mid x - 163 \\ 232(y - 137) = 195(x - 163) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 163 = 232k; k \in \mathbb{Z} \\ 232(y - 137) = 195 \times 232k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 163 = 232k \\ y - 137 = 195k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Donc: } S = \{(163 + 232k; 137 + 195k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

c) Soit  $d$  un entier tel que:

$$0 \leq d \leq 232 \text{ et } 195d \equiv 1 [232].$$

Il existe  $\lambda$  tel que:  $195d - 232\lambda = 1$ .

Donc, d'après 1] b), il existe  $\lambda \in \mathbb{Z}$  tel que

$$d = 163 + 232\lambda$$

$$\text{Comme } d \in [0; 232], \text{ alors } -\frac{163}{232} \leq \lambda \leq \frac{69}{232}$$

et puisque  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , alors  $\lambda = 0$ .

Donc:  $d = 163$ . On vérifie que 163

satisfait aux conditions imposées:

$$163 \times 195 = 1 + 232 \times 137 \equiv 1 [232] \text{ et } 0 \leq 163 \leq 232.$$

En conclusion:

le seul entier tel que  $0 \leq d \leq 232$

et  $195d \equiv 1 [232]$  est  $d = 163$ .



1) Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à 233 sont:  
 $2; 3; 5; 7; 11; 13$   
 Et 233 n'est divisible par aucun d'entre eux quelconque.  
 $233 \equiv 1[2], 233 \equiv 2[3], 233 \equiv 3[5]$   
 $233 \equiv 2[7], 233 \equiv 2[11] \text{ et } 233 \equiv 12[13].$   
 Donc: 233 est un nombre premier.

2) a) Soit  $a \in A \setminus \{0\}$   
 Comme 233 est premier, alors  $a \wedge 233 = 1$ .  
 D'après le théorème de Fermat:

$$a^{233} \equiv 1[233] \text{ pour } a \in A \setminus \{0\}.$$

b). On a:  $f(0) = 0$ .

Pour  $a \in A$ , si  $f(a) = 0$ , alors  $a = 0$

• Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $A \setminus \{0\}$  tels que:  $f(a) = f(b)$

Comme:  $f(a) \equiv a^{195}[233]$  et  $f(b) \equiv b^{195}[233]$ ,

alors:  $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

Donc:  $(a^{195})^{163} \equiv (b^{195})^{163}[233]$

c'est-à-dire:  $a^{195 \times 163} \equiv b^{195 \times 163}[233]$

Comme:  $195 \times 163 - 232 \times 137 = 1$ , alors

$$a^{1+232 \times 137} \equiv b^{1+232 \times 137}[233]$$

Comme  $a^{1+232 \times 137} \equiv (a^{232})^{137} \times a$

et  $a^{232} \equiv 1[233]$ ,

alors  $a^{1+232 \times 137} \equiv a[233]$

De même  $b^{1+232 \times 137} \equiv b[233]$

On en déduit:  $a \equiv b[233]$

Donc: 233 divise  $a - b$ , et puis que

$$-231 \leq a - b \leq 231, \text{ alors } a - b = 0$$

et par suite  $a = b$ .

• En conclusion:

$$(\forall a, b \in A) \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

c). 1<sup>er</sup> cas:  $b = 0$

Si  $b = f(a)$  c'est-à-dire  $f(a) = 0$

ou encore  $f(a) = f(0)$ , alors  $a = 0$ .

2<sup>e</sup> cas:  $b \neq 0$  et  $0 < b \leq 230$

Soit  $a \in A$  tel que  $f(a) = b$  ( $a \neq 0$ )

On a alors:  $a^{195} \equiv b[233]$

Donc:  $(a^{195})^{163} \equiv b^{163}[233]$

$$a^{195 \times 163} \equiv b^{163}[233]$$

Donc:  $a^{1+232 \times 137} \equiv b^{163}[233]$

$$a \times (a^{232})^{137} \equiv b^{163}[233]$$

Comme:  $a^{232} \equiv 1[233]$  (car  $a \neq 0$ ), alors  
 $(a^{232})^{137} \equiv 1[233]$  et  $a \times (a^{232})^{137} \equiv a[233]$ .

Donc:  $a \equiv b^{163}[233]$

D'où: Si  $a$  et  $b$  sont des éléments de  $A$  tels que  $f(a) = b$ , alors  $a$  est le reste de la division euclidienne de  $b^{163}$  par 233.

d).  $f: A \rightarrow A$  est injectif d'après 3)b).

-  $f$  est surjectif d'après 3)c) et l'absurdité d'un élément  $b$  de  $A$  est le reste de la division de  $b^{163}$  par 233.

• Conclusion:

$f: A \rightarrow A$  est bijectif, et sa bijection réciproque  $f^{-1}: A \rightarrow A$  est telle que pour tout  $a$  de  $A$ ,  $f^{-1}(a)$  est le reste de la division euclidienne de  $a^{163}$  par 233.

147 I. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  
 (E):  $35x - 96y = 1$ .

1) Vérifier que le couple  $(11; 4)$  est une solution particulière de l'équation (E)

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

II. On considère, dans  $\mathbb{N}$ , l'équation:

$$(F): x^{35} \equiv 2[97].$$

1) Soit  $x$  une solution de l'équation (F).

a) Montrer que 97 est premier.

Montrer que  $x$  et 97 sont premiers entre eux.

b) Montrer que:  $x^{96} \equiv 1[97]$

c) Montrer que:  $x \equiv 2^{11}[97]$

2) Montrer que si  $x$  est un entier naturel qui vérifie  $x \equiv 2^{11}[97]$ , alors  $x$  est une solution de l'équation (F).

3) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent  $11 + 97k$ , où  $k \in \mathbb{N}$ .

Solution

1) On a:  $35 \times 11 - 96 \times 4 = 385 - 384 = 1$

Donc,  $(11; 4)$  est une solution de l'équation (E).

2) Désignons par  $S$  l'ensemble des solutions de (E)



- Soit  $(u; v) \in S$ . On a :  $35u - 96v = 1$   
c'est-à-dire :  $35(u-11) = 96(v-4)$   
Donc :  $\begin{cases} 96 \text{ divise } 35(u-11) \\ 96(v-4) = 35(u-11) \end{cases}$   
Comme  $96 \wedge 35 = 1$  (car  $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$ ),  
alors d'après le théorème de Gauss  
 $96$  divise  $u-11$  et  $96(v-4) = 35(u-11)$   
Donc, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  
 $u-11 = 96k$  et  $96(v-4) = 35 \times 96k$   
 $u-11 = 96k$  et  $v-4 = 35k$   
Donc :  $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; u = 11 + 96k$  et  $v = 4 + 35k$ .
- On vérifie que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le couple  $(11 + 96k; 4 + 35k)$  est une solution de l'équation (E). En effet :  
 $35(11 + 96k) - 96(4 + 35k) = 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$ .
- En conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :  
 $S = \{ (11 + 96k; 4 + 35k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$

II. 1] Soit  $x$  une solution de l'équation (F).

On a :  $x^{35} \equiv 2 [97]$  (et  $x \in \mathbb{N}$ )

- a). Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à 97 sont 2; 3; 5; 7. Et 97 n'est divisible par aucun d'entre eux car :

$97 \equiv 1 [2], 97 \equiv 1 [3], 97 \equiv 2 [5]$  et  $97 \equiv 6 [7]$

Donc : **97 est un nombre premier.**

- 97 est premier et  $x^{35} \equiv 2 [97]$ .

Donc :  $x^{37} \wedge 97 = 1$ .

Donc :  **$x \wedge 97 = 1$**

(Noter que :  $x^{35} \wedge 97 \neq 1 \Leftrightarrow x^{35} \wedge 97 = 97$   
 $\Leftrightarrow 97 \mid x^{35}$   
 $\Leftrightarrow 97 \mid x$   
 $\Leftrightarrow x \wedge 97 = 97$   
 $x^{35} \wedge 97 \neq 1 \Leftrightarrow x \wedge 97 \neq 1$ )

- b) 97 est premier et  $x \wedge 97 = 1$ .  
D'après le théorème de Fermat :

**$x^{96} \equiv 1 [97]$**

c) On a :  $(x^{96})^4 \equiv 1 [97]$

c'est-à-dire :  $x^{36 \times 4} \equiv 1 [97]$

ou encore :  $x^{96 \times 4 + 1} = x [97]$

Comme :  $96 \times 4 + 1 = 35 \times 11$ , alors

$x^{35 \times 11} \equiv x [97]$

Donc :  **$(x^{35})^{11} \equiv x [97]$**

Or  $x^{35} \equiv 2 [97]$ , alors  $(x^{35})^{11} \equiv 2^{11} [97]$ .

Donc :  **$x \equiv 2^{11} [97]$** .

Ainsi :  **$(x \text{ solution de (F)}) \Rightarrow x \equiv 2^{11} [97]$**

2] Soit  $x \in \mathbb{N}$  tel que :  **$x \equiv 2^{11} [97]$**

On a :  $x^{35} \equiv (2^{11})^{35} [97]$

$x^{35} \equiv 2^{35 \times 11} [97]$

Et on a :  $2^{35 \times 11} = 2^{96 \times 4 + 1} = (2^{96})^4 \times 2$

Comme  $2 \wedge 97 = 1$  et 97 est premier, alors

d'après le théorème de Fermat :  $2^{96} \equiv 1 [97]$

Donc :  $(2^{96})^4 \equiv 1 [97]$  et  $(2^{96})^4 \times 2 \equiv 2 [97]$ .

Donc :  **$x^{35} \equiv 2 [97]$**

Ainsi :  **$x \equiv 2^{11} [97] \Rightarrow x^{35} \equiv 2 [97]$**

**$x \equiv 2^{11} [97] \Rightarrow (x \text{ solution de (F)})$**

- 3] D'après les résultats de 1] et 2] de la partie I, on a :

**$x^{35} \equiv 2 [97] \Leftrightarrow x \equiv 2^{11} [97]$**

Par ailleurs :  $2^{11} = 2048 = 21 \times 97 + 11$ .

Donc :  **$2^{11} \equiv 11 [97]$** .

Donc :  **$x^{35} \equiv 2 [97] \Leftrightarrow x \equiv 11 [97]$**

**l'ensemble des solutions de l'équation (F) est  $T = \{ 11 + 97k \mid k \in \mathbb{N} \}$ .**

(148) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose :

$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

- 1] a) Vérifier que  $a_n$  est un nombre pair pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

- b) Déterminer les valeurs de  $n$  pour lesquels  $a_n \equiv 0 [3]$

- 2] Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p > 3$ .

- a) Montrer que :

$2^{p-1} \equiv 1 [p]$  et  $3^{p-1} \equiv 1 [p]$  et  $6^{p-1} \equiv 1 [p]$

- b) Montrer que :  $p$  divise  $a_{p-1}$ .

- c) Montrer que quel que soit l'entier naturel premier  $q$ , il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que :

**$a_n \wedge q = q$ .**

### Solution

- 1] a) On a :  $2^n \equiv 0 [2]$  (car  $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $6^n \equiv 0 [2]$

et  $3^n \equiv 1 [2]$  (car  $3 \equiv 1 [2]$ ). Donc :  $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 [2]$ .

Donc :  **$a_n \equiv 0 [2]$  c'est-à-dire :  $a_n$  est pair.**

- b) On a :  $3^n \equiv 0 [3]$  et  $6^n \equiv 0 [3]$  (car  $n \in \mathbb{N}^*$ )

Donc :  **$a_n \equiv 2^n - 1 [3]$**



Comme:  $2 \equiv -1[3]$ , alors:  $a_n \equiv (-1)^n - 1[3]$ .

On a:  $a_n \equiv 0[3] \Leftrightarrow (-1)^n \equiv 1[3]$

$a_n \equiv 0[3] \Leftrightarrow (n \text{ pair})$

Soit on a:  $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \equiv 0[3]\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ .

a) Comme  $p$  est premier et  $p > 3$ , alors  $p \nmid 2$  et  $p \nmid 3$ .

D'après le théorème de Fermat:

$$2^{p-1} \equiv 1[p] \text{ et } 3^{p-1} \equiv 1[p]$$

Donc:  $2^{p-1} \times 3^{p-1} \equiv 1[p]$ .

c'est-à-dire:  $(2 \times 3)^{p-1} \equiv 1[p]$ .

Soit:  $6^{p-1} \equiv 1[p]$

b) On a:  $6a_{p-1} = 6(2^{p-1} + 3^{p-1} + 6^{p-1} - 1)$   
 $= 3 \times 2 \times 2^{p-1} + 2 \times 3 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$   
 $= 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$

$$6a_{p-1} = 3(2^{p-1} - 1) + 2(3^{p-1} - 1) + (6^{p-1} - 1)$$

Comme:  $2^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$  et  $3^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$

et  $6^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$ , alors  $6a_{p-1} \equiv 0[p]$

c'est-à-dire:  $p$  divise  $6a_{p-1}$ .

Comme  $p \nmid 6$  et  $p \nmid 1$ , alors  $p \nmid 6$ .

D'après le théorème de Gauss:  $p$  divise  $a_{p-1}$ .

c) Soit  $q$  un nombre premier positif.

1<sup>er</sup> cas:  $q > 3$ .

D'après a) b),  $q$  divise  $a_{q-1}$  c'est-à-dire

$a_{q-1} \wedge q = q$ . Dans ce cas, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$

tel que  $a_n \wedge q = q$  (il suffit de prendre  $n = q - 1$ )

2<sup>ème</sup> cas:  $q = 2$ .

On sait que pour tout entier  $n$ ,  $a_n$  est un nombre pair et  $a_n \wedge 2 = 2$

Donc, tous les nombres  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  répondent à la question.

3<sup>ème</sup> cas:  $q = 3$ .

D'après 1) b), on a:  $a_{2k} \equiv 0[3]$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$  et  $a_{2k} \wedge 3 = 3$

Donc, tous les nombres entiers naturels  $n$  pairs répondent à la question

Conclusion:

Pour tout nombre premier positif  $q$ , il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que:  $a_n \wedge q = q$

Remarque:

On peut noter que:  $a_n = (1+2^n)(1+3^n) - 2$

149 1] Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que:  $n^2 + 1 \equiv 0[5]$ .

a) Soit  $p$  un nombre premier tel que:  $p = 3 + 4k$  avec  $k \in \mathbb{N}$

Soit  $n$  un entier naturel tel que:  $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

a) Vérifier que:  $(n)^{1+4k} \equiv -1[p]$

b) Montrer que:  $n \wedge p = 1$ .

c) En déduire que:  $(n)^{1+4k} \equiv 1[p]$ .

d) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel  $n$  qui vérifie:  $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

### Solution

1] Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a:

$$n^2 + 1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow n^2 \equiv 4[5] \Leftrightarrow 5 \mid (n+2)(n-2)$$

Comme 5 est premier, alors:

$$n^2 + 1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow (5 \mid n+2 \text{ ou } 5 \mid n-2) \\ \Leftrightarrow [n \equiv -2[5] \text{ ou } n \equiv 2[5]] \\ \Leftrightarrow [n \equiv 3[5] \text{ ou } n \equiv 2[5]]$$

Donc l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $n^2 + 1 \equiv 0[5]$  est:

$$S = \{3 + 5\lambda \mid \lambda \in \mathbb{N}\} \cup \{2 + 5\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$$

Remarque

On peut aussi dresser la liste des carrés modulo 5

$n \text{ modulo } 5$	0	1	2	3	4
$n^2 \text{ modulo } 5$	0	1	4	4	1

Où:  $n^2 \equiv -1[5] \Leftrightarrow (n \equiv 2[5] \text{ ou } n \equiv 3[5])$

2] a) On a:  $n^2 \equiv -1[p]$ .

Donc:  $(n)^{1+4k} \equiv (-1)^{1+4k} [p]$

Comme  $(-1)^{1+4k} = [(-1)^4]^k \times (-1) = -1$ , alors:

$$(n)^{1+4k} \equiv -1[p]$$

b) On a:  $n^2 \equiv -1[p]$ . Comme  $p$  est premier, alors  $n \wedge p = 1$  et par suite:  $n \wedge p = 1$ .

c) D'après le théorème de Fermat:

$$n^{p-1} \equiv 1[p]$$

c'est-à-dire:  $n^{2+4k} \equiv 1[p]$ .

Donc:  $(n)^{1+4k} \equiv 1[p]$

d) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que:  $n^2 + 1 \equiv 0[p]$



d'après 2] a), on a:  $(n^c)^{1+2k} \equiv -1 [p]$   
 et d'après 2] c), on a:  $(n^c)^{1+2k} \equiv 1 [p]$   
 Alors, on aura:  $1 \equiv -1 [p]$  c'est-à-dire  
 $p$  divise 2; ce qui contredit le fait que  
 $p$  est premier et  $p \geq 3$ .

En définitive, si  $p$  est un nombre premier  
 s'écrivant sous la forme  $p = 3 + 4k$ ,  
 avec  $k \in \mathbb{N}$ , alors l'équation  $n^c + 1 \equiv 0 [p]$   
 n'admet pas de solution dans  $\mathbb{N}$ .

(150) Soit  $N$  le nombre entier naturel  
 représenté dans le système décimal par:

$$N = \underbrace{111 \dots 11}_{2010 \text{ fois}}$$

1] Montrer que:  $N$  est divisible par 11.

2] a) Vérifier que 2011 est premier  
 et que:  $10^{2010} - 1 = 9N$ .

b) Montrer que 2011 divise  $9N$ .

c) En déduire que 2011 divise  $N$ .

3] Montrer que  $N$  est divisible par  
 le nombre 22121.

### Solution

1] On a:  $N = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2009} = \sum_{k=0}^{2009} 10^k$   
 Comme  $10 \equiv -1 [11]$  et  $10^k \equiv (-1)^k [11]$ ,  
 et  $N = (1 + 10^2 + \dots + 10^{2008}) + (10 + 10^3 + \dots + 10^{2009})$ ,  
 alors:  $N \equiv (1 + 1 + \dots + 1) - (1 + 1 + \dots + 1) [11]$   
 2005 termes 2005 termes

Donc:  $N \equiv 0 [11]$

$N$  est divisible par 11.

2] a) Les nombres premiers positifs dont le carré  
 est inférieur ou égal à 2011 sont  
 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,  
 41 et 43. Et 2011 n'est divisible par  
 aucun d'eux puisqu'il est

$2011 \equiv 1 [2]$ ,  $2011 \equiv 3 [3]$ ,  $2011 \equiv 5 [5]$

$2011 \equiv 2 [7]$ ,  $2011 \equiv 9 [11]$ ,  $2011 \equiv 9 [13]$

$2011 \equiv 5 [17]$ ,  $2011 \equiv 16 [19]$ .

$2011 \equiv 10 [23]$ ,  $2011 \equiv 10 [29]$ ,  $2011 \equiv 27 [31]$

$2011 \equiv 13 [37]$ ,  $2011 \equiv 2 [41]$  et  $2011 \equiv 33 [43]$ .

Donc: 2011 est premier.

- On a:  $10^{2010} - 1 = (10^{2009} + 10^{2008} + \dots + 10 + 1)(10 - 1)$   
 c'est-à-dire:  $10^{2010} - 1 = 9N$ .

b) 2011 est premier et  $10 \not\equiv 1 [2011]$ .

D'après le théorème de Fermat:  $10^{2010} \equiv 1 [2011]$   
 c'est-à-dire: 2011 divise  $10^{2010} - 1$

ou encore: 2011 divise  $9N$

c) 2011 est premier et  $9 < 2011$ .

Donc  $2011 \nmid 9$ .

Puisque 2011 divise  $9N$ , d'après le  
 théorème de Gauss: 2011 divise  $N$ .

3] On sait que  $11 \mid N$  et  $2011 \mid N$  et que  
 $2011 \nmid 11$ , alors  $11 \times 2011$  divise  $N$   
 c'est-à-dire: 22121 divise  $N$ .

(151) Soit  $x$  un nombre entier naturel tel  
 que:  $10^x \equiv 2 [19]$ .

1] a) Vérifier que:  $10^{x+1} \equiv 1 [19]$

b) Montrer que:  $10^{18} \equiv 1 [19]$

2] Soit  $\delta = 18 \mid (x+1)$

a) Montrer que  $10^\delta \equiv 1 [19]$

b) Montrer que:  $\delta = 18$

c) En déduire que:  $x \equiv 17 [18]$

### Solution

1] a) On  $10^2 \equiv 5 [19]$ . Donc:  $10^x \times 10 \equiv 20 [19]$

Comme:  $10^x \times 10 = 10^{x+1}$  et  $20 \equiv 1 [19]$ ,

alors:  $10^{x+1} \equiv 1 [19]$

b) 19 est un nombre premier et  $19 \nmid 10$

D'après le théorème de Fermat:  $10^{18} \equiv 1 [19]$

2]  $\delta = 18 \mid (x+1)$

a) Il existe deux entiers naturels  $\alpha$  et  $\beta$  tels  
 que:  $(x+1)\alpha - 18\beta = \delta$  (Bézout)

On a:  $10^{x+1} \equiv 1 [19]$ ; donc  $(10^{x+1})^\alpha \equiv 1 [19]$

c'est-à-dire:  $10^{(x+1)\alpha} \equiv 1 [19]$

Et on a:  $(x+1)\alpha = \delta + 18\beta$ .

Donc:  $10^{\delta+18\beta} \equiv 1 [19]$

c'est-à-dire:  $10^\delta \times (10^{18})^\beta \equiv 1 [19]$

Comme  $10^{18} \equiv 1 [19]$ , alors  $(10^{18})^\beta \equiv 1 [19]$

et par suite:  $10^\delta \times 1 = 10^\delta \equiv 1 [19]$

Où:  $10^\delta \equiv 1 [19]$ .

b) On a:  $\delta$  divise 18 et  $10^\delta \equiv 1 [19]$



Donc:  $\delta \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$   
 On:  $10^1 \equiv 10 [19], 10^2 \equiv 5 [19], 10^3 \equiv 12 [19]$   
 $10^4 \equiv 11 [19], 10^5 \equiv 18 [19] \text{ et } 10^6 \equiv 1 [19]$   
 On:  $\delta = 18$   
 On a:  $18 = 18 \wedge (x+1)$ .  
 On:  $18(x+1) \text{ ou encore } x \equiv -1 [18]$   
 On:  $x \equiv 17 [18] \text{ (car } -1 \equiv 17 [18])$   
 Remarque: On a établi que:  
 $(\forall x \in \mathbb{N}) (10^x \equiv 1 [19] \Rightarrow x \equiv 17 [18])$

(15) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  
 (E):  $143x - 195y = 50$   
 1) a) Déterminer:  $143 \wedge 195$ . On déduit que  
 l'équation (E) admet des solutions dans  
 $\mathbb{Z}^2$ .  
 b) Sachant que le couple  $(-1; -1)$  est une  
 solution particulière de l'équation (E),  
 résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E) en  
 mettant en évidence les étapes de la  
 solution.  
 2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n \wedge 5 = 1$ .  
 Montrer que:  $(\forall h \in \mathbb{N}) n^{4h} \equiv 1 [5]$ .  
 3) Soit  $(x; y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $x \equiv y [4]$ .  
 a) Montrer que:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n^x \equiv n^y [5]$ .  
 b) On déduit que:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n^x \equiv n^y [10]$   
 4) Soit  $(x; y) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $(x; y)$  est une  
 solution de l'équation (E).  
 Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  
 $n^x$  et  $n^y$  ont le même chiffre des unités  
 dans le système décimal de numération.

Solution  
 1) a) On peut déterminer le p.g.d.c de 143  
 et 195 soit en utilisant la décomposition  
 en produit de facteurs premiers, soit en  
 utilisant l'algorithme d'Euclide.  
 b) En utilisant la décomposition  
 On a:  $143 = 11 \times 13$  et  $195 = 3 \times 5 \times 13$ .  
 Donc:  $143 \wedge 195 = 13$   
 c) En utilisant l'algorithme d'Euclide  
 On a:  $195 = 143 \times 1 + 50$

Donc:  $195 \wedge 143 = 143 \wedge 50$   
 On a:  $143 = 2 \times 50 + 39$   
 Donc:  $143 \wedge 50 = 50 \wedge 39$   
 On a:  $50 = 1 \times 39 + 13$   
 Donc:  $50 \wedge 39 = 39 \wedge 13$   
 On a:  $39 = 3 \times 13$   
 Donc:  $39 \wedge 13 = 13$ .  
 On a:  $143 \wedge 195 = 13$   
 Comme  $143 \wedge 195 = 13$  et  $50 = 13 \times 4$ ,  
 alors:  $143 \wedge 195 \mid 50$ .  
 Par suite, l'équation (E) admet des  
 solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .  
 Soit  $(a; b; c) \in (\mathbb{Z}^*)^3$ .  
 L'équation  $ax + by = c$  admet des  
 solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  si, et seulement si,  
 $a \wedge b \mid c$   
 b) On a:  $143 \times (-1) - 195 \times (-1) = 195 - 143 = 50$   
 Donc, le couple  $(-1; -1)$  est une solution  
 de l'équation (E).  
 c) Soit  $(x; y)$  une solution de l'équation (E).  
 On a:  $143x - 195y = 195 - 143$   
 $143(x+1) = 195(y+1)$   
 $11 \times 13(x+1) = 15 \times 13(y+1)$   
 $11(x+1) = 15(y+1)$   
 Donc:  $15 \mid 11(x+1)$  et  $15(y+1) = 11(x+1)$   
 Comme 11 est premier et  $11 \wedge 15 = 1$ , alors  
 d'après le théorème de Gauss:  
 $15 \mid x+1$  et  $15(y+1) = 11(x+1)$   
 Donc, il existe  $h \in \mathbb{Z}$  tel que:  
 $x+1 = 15h$  et  $15(y+1) = 11 \times 15h$   
 c'est-à-dire tel que:  
 $x+1 = 15h$  et  $y+1 = 11h$   
 Donc:  $(3h \in \mathbb{Z}) ; \begin{cases} x = 15h - 1 \\ y = 11h - 1 \end{cases}$   
 d) Par ailleurs, pour tout  $h$  de  $\mathbb{Z}$ , on a:  
 $143(15h-1) - 195(11h-1) = 195 - 143 = 50$   
 Donc, pour tout  $h \in \mathbb{Z}$ ,  $(15h-1; 11h-1)$  est  
 solution de E.  
 e) Conclusion: l'ensemble des solutions de (E) est  
 $S = \{(15h-1; 11h-1) \mid h \in \mathbb{Z}\}$



2] Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que:  $n \wedge 5 = 1$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  
5 est premier; donc d'après le théorème de Fermat:  $n^4 \equiv 1 [5]$  et par suite:

$$(n^4)^k \equiv 1 [5],$$

c'est-à-dire:  $n^{4k} \equiv 1 [5]$ .

Ainsi: Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \wedge 5 = 1$ ,  
on a:  $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad n^{4k} \equiv 1 [5]$ .

3] Soit  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que:  $x \equiv y [4]$

a) Sans perte de généralité, on peut supposer  
que  $x \geq y$ . Alors, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que:

$$x - y = 4k \text{ ou encore } x = y + 4k.$$

$$\text{On a: } n^x = n^{y+4k} = n^y \times n^{4k}$$

D'après le résultat de 2],  $n^{4k} \equiv 1 [5]$

Donc:  $n^y \times n^{4k} \equiv n^y [5]$ , c'est-à-dire  
 $n^x \equiv n^y [5]$ .

Ainsi: Pour  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on a:

$$x \equiv y [4] \Rightarrow n^x \equiv n^y [5]$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $x \equiv y [4]$

Comme  $x$  et  $y$  sont de même parité  
(car  $x - y$  est pair), alors  $n^x$  et  $n^y$   
sont de même parité que  $n$ .

Donc:  $n^x \equiv n^y [2]$

$$\text{Alors } \begin{cases} 5 \mid n^x - n^y & (\text{d'après 3] a}) \\ 2 \mid n^x - n^y \end{cases}$$

Comme  $2 \wedge 5 = 1$ , alors  $10 \mid n^x - n^y$

Où: Pour  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on a:

$$x \equiv y [4] \Rightarrow n^x \equiv n^y [10]$$

4] Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $(x, y)$  est une solution

$$\text{de } (E): 143x - 195y = 52$$

$$\text{ou encore: } 11x - 15y = 4$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après 1) b), il existe un entier naturel  
non nul  $\lambda$  tel que:

$$x = 15\lambda - 1 \text{ et } y = 11\lambda - 1$$

$$\text{On a: } x - y = 4\lambda. \text{ Donc: } x \equiv y [4]$$

D'après 3) b):  $n^x \equiv n^y [10]$

Comme chaque entier naturel est congru  
à son chiffre d'unités modulo 10, alors:

$n^x$  et  $n^y$  ont le même chiffre des unités dans  
le système décimal.

153 1) a) Vérifier que 503 est premier.

b) Montrer que:  $7^{506} \equiv 1 [503]$ .

En déduire que:  $7^{1008} \equiv 1 [503]$ .

2] On considère, dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation  
(E):  $49x - 6y = 1$ .

Sachant que le couple  $(1; 9)$  est une  
solution particulière de l'équation (E),  
résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E) en  
mettant en évidence les étapes de la  
solution.

3] On pose:  $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{1007}$

a) Montrer que le couple  $(7^{1008}; N)$  est  
une solution de l'équation (E).

b) Montrer que:

$$N \equiv 0 [4] \text{ et } N \equiv 0 [503]$$

c) En déduire que  $N$  est divisible par  
2012.

### Solution

1] a) Les nombres premiers positifs dont le carré est  
inférieur ou égal à 503 sont:

$$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19$$

Et 503 n'est divisible par aucun d'eux car:

$$503 \equiv 1 [2]; 503 \equiv 2 [3]; 503 \equiv 3 [5];$$

$$503 \equiv 6 [7]; 503 \equiv 8 [11]; 503 \equiv 9 [13];$$

$$503 \equiv 10 [17]; 503 \equiv 9 [19]$$

Donc: 503 est un nombre premier.

b) 503 est premier et  $503 \wedge 7 = 1$   
(503 et 7 sont deux nombres premiers distincts)

$$\text{Donc: } 7^{506} \equiv 1 [503].$$

On a:  $(7^{506})^4 \equiv 1 [503]$ .

$$\text{Donc: } 7^{1008} \equiv 1 [503]$$

2] Soit  $S$  l'ensemble des solutions de (E)

• Soit  $(x, y) \in S: (x, y) \in \mathbb{Z}^2$  et  $49x - 6y = 1$

$$\text{On a: } 49(x-1) = 6(y-8)$$

$$\text{Donc: } 6 \mid 49(x-1) \text{ et } 6 \mid (y-8) = 49(x-1)$$

Comme  $6 \wedge 49 = 1$  (car  $49 \times 1 - 6 \times 8 = 1$ ), alors  
d'après le théorème de Gauss:

$$6 \mid x-1 \text{ et } 6 \mid y-8 = 49(x-1)$$

Donc, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que:

$$x-1 = 6k \text{ et } 6(y-8) = 49 \times 6k$$

c'est-à-dire tel que:

$$x-1 = 6k \text{ et } y-8 = 49k$$



Donc:  $x = 6k+1$  et  $y = 49k+8$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Ainsi:  $S \subset \{(6k+1; 49k+8) | k \in \mathbb{Z}\}$

Soit  $k \in \mathbb{Z}$ ; on a:

$$49(6k+1) - 6(49k+8) = 49 \times 1 - 6 \times 8 = 1$$

Donc  $(6k+1; 49k+8)$  est une solution de l'équation (E).

Ainsi:  $\{(6k+1; 49k+8) | k \in \mathbb{Z}\} \subset S$ .

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation (E):  $49x - 6y = 1$  dans  $\mathbb{Z}^2$  est  $S = \{(6k+1; 49k+8) | k \in \mathbb{Z}\}$

3) a) On a:  
 $(7-1)(7^{1007} + 7^{1006} + \dots + 7^1 + 1) = 7^{1008} - 1$

Donc:  $6N = 7^L \times 7^{1006} - 1$

et par suite:  $49 \times 7^{1006} - 6N = 1$

ce qui signifie que:

$(7^{1006}; N)$  est une solution de (E).

b) On a:  $N = (1 + 7^1 + \dots + 7^{1007}) / (7 + 7^2 + \dots + 7^{1007})$

Et on a:

$$\begin{cases} 1 + 7^1 + \dots + 7^{1007} = 7^{1008} - 1 \\ 7 + 7^2 + \dots + 7^{1007} = 7^{1007} - 1 \end{cases}$$

et  $7 \equiv -1 [4]$  et  $7^L \equiv 1 [4]$

Donc:  $N \equiv \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{1008 \text{ termes}} - \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{1007 \text{ termes}} [4]$

Où:  $N \equiv 0 [4]$

On a:  $6N = 7^{1008} - 1$

et  $7^{1008} \equiv 1 [503]$  (d'après 1) b))

Donc:  $6N \equiv 0 [503]$ , c'est-à-dire

$503 | 6N$ . Comme 503 est premier et  $6 \nmid 503$ , alors  $503 | N$ .

D'après le théorème de Fermat:

$N \equiv 0 [503]$

c) On a:

$$\begin{cases} 4 | N \text{ et } 503 | N \\ 4 \wedge 503 = 1 \end{cases}$$

Alors:  $4 \times 503 | N$ ,  
c'est-à-dire:

Où:  $2012 | N$ .

$N$  est divisible par 2012.

(154) L'objectif de cet exercice est la recherche des entiers naturels  $n$  strictement supérieurs à 1 qui vérifient la propriété:  
(R):  $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$ .

1) On suppose que  $n$  vérifie (R).

Soit  $p$  le plus petit diviseur premier positif du nombre  $n$ .

a) Montrer que:  $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ .

On déduit que:  $p \geq 5$ .

b) Montrer que:  $2^{p-1} \equiv 1 [p]$  et  $3^{p-1} \equiv 1 [p]$

c) Montrer qu'il existe  $(a; b)$  dans  $\mathbb{Z}^2$  tel que:  $an - b(p-1) = 1$ .

d) Soit  $r$  et  $q$  respectivement le reste et le quotient de la division de  $a$  par  $p-1$ . ( $a = q(p-1) + r$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq r < p-1$ )

Montrer qu'il existe un entier naturel  $t$  tel que:  $rn = t + k(p-1)$

e) Dédurre de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel  $n$  strictement supérieur à 1, qui vérifie la propriété (R).

### Solution

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  et  $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$

Soit  $p$  le plus petit diviseur premier positif de  $n$

a) On a:  $n | 3^n - 2^n$  et  $p | n$ . Donc:  $p | 3^n - 2^n$ ,  
c'est-à-dire:  $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$

• On a:  $3^n \equiv 1 [p]$  (car  $3 \equiv 1 [p]$ ) et  $2^n \equiv 0 [p]$  (car  $n > 1$ ).

Donc:  $3^n - 2^n \equiv 1 [p]$

Ainsi:  $p \neq 2$

• On a:  $3^n \equiv 0 [3]$  (car  $n > 0$ ) et  $2^n \equiv (-1)^n [3]$  (car  $2 \equiv -1 [3]$ ).

Donc:  $3^n - 2^n \equiv -(-1)^n [3]$

Par suite:  $3^n - 2^n \equiv 1 [3]$  ou  $3^n - 2^n \equiv -1 [3]$

Ainsi:  $p \neq 3$

• En conséquence,  $p$  est un nombre premier positif différent de 2 et de 3.

Où:  $p \geq 5$ .

b)  $p$  est un nombre premier et  $p \neq 2$  et  $p \neq 3$

Donc:  $p-1 \equiv 1$  et  $p-1 \equiv 1$  (et 3 étant premier distinct de  $p$ ).

D'après le théorème de Fermat:

$2^{p-1} \equiv 1 [p]$  et  $3^{p-1} \equiv 1 [p]$



c) Montrons d'abord que  $n \mid (p-1) \Rightarrow 1$ .

Raisonnons par l'absurde et posons  $n \mid (p-1) \neq 1$  et supposons que  $\delta > 1$ .

Soit  $p'$  un nombre premier positif qui divise  $\delta$ .

$p'$  divise  $\delta$  et  $(\delta \mid n \text{ et } \delta \mid (p-1))$

Donc:  $p' \mid n$  et  $p' \leq \delta \leq p-1$  et  $p'$  divise  $n$ .

On aura:

$p'$  premier positif,  $p'$  divise  $n$  et  $p' \leq p-1 < p$ .

Ce qui contredit la définition de  $p$ .

Donc:  $n \mid (p-1) = 1$ .

d'après le théorème de Bézout:

$$(\exists (a; b) \in \mathbb{Z}^2); a n - b(p-1) = 1$$

d) Soit  $(q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que:

$$a = q(p-1) + r \text{ et } 0 \leq r < p-1$$

$$\text{On a: } a n - b(p-1) = 1$$

$$\text{Donc: } [q(p-1) + r] n - b(p-1) = 1$$

c'est-à-dire

$$r n - (p-1)(b - q n) = 1$$

$$\text{ou encore: } (p-1)(b - q n) = -1 + r n$$

$$\text{Posons: } k = b - q n.$$

$$\text{On a: } (p-1)k = -1 + r n$$

Comme  $r \geq 0$  et  $n \geq 1$ , alors  $r n \geq 0$

$$\text{Donc: } (p-1)k \geq -1$$

$(p-1)k$  est nécessairement différent de -1

car  $p-1 \geq 4$  (car sinon si  $(p-1)k$  est égal à -1, on aura:  $p-1=1$  et  $k=-1$

c'est-à-dire  $p=2$  et  $k=-1$ ; ce qui est absurde)

On en déduit que:  $(p-1)k \geq 0$ .

Donc:  $k \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

On définit:

Il existe un entier naturel  $k$  tel que

$$r n = 1 + k(p-1)$$

( $r$  est le reste de la division de  $a$  par  $p-1$  et  $0 \leq r < p-1$ )

2] Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier  $n > 1$  tel que

$$3^n - 2^n \equiv 0 [n]$$

Soit  $p$  le plus petit diviseur premier positif de  $n$ .

$$\text{On a: } 2^{p-1} \equiv 1 [p] \text{ et } 3^{p-1} \equiv 1 [p]$$

$$\text{Donc: } (2^{p-1})^k \equiv 1 [p] \text{ et } (3^{p-1})^k \equiv 1 [p]$$

où  $k$  est l'entier naturel dont on montre l'existence et qui vérifie  $r n - k(p-1) = 1$

$$\text{On a: } 2^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \text{ et } 3^{k(p-1)} \equiv 1 [p]$$

$$\text{Donc: } 3 \times 3^{k(p-1)} - 2 \times 2^{k(p-1)} \equiv 3 - 2 [p]$$

$$3^{1+k(p-1)} - 2^{1+k(p-1)} \equiv 1 [p]$$

$$\text{Donc: } 3^{r n} - 2^{r n} \equiv 1 [p] \quad (*)$$

$$\text{Par ailleurs: } 3^n \equiv 2^n [p] \quad (\text{d'après 1] a})$$

$$\text{Donc: } (3^n)^r \equiv (2^n)^r [p]$$

$$\text{c'est-à-dire: } 3^{r n} \equiv 2^{r n} [p]$$

$$\text{ou encore: } 3^{r n} - 2^{r n} \equiv 0 [p] \quad (**)$$

De (\*) et (\*\*), on déduit que:  $1 \equiv 0 [p]$

c'est-à-dire que  $p$  divise 1; ce qui est contradictoire.

Par conséquent, il n'existe pas d'entiers  $n > 1$  tel que:  $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$

155) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On pose:  $a_n = \underbrace{333 \dots 31}_{n \text{ fois}} \quad (n \text{ fois le chiffre } 3)$

1] Vérifier que  $a_1$  et  $a_2$  sont premiers.

2] Montrer que:  $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3] Montrer que:  $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad 10^{3k+1} \equiv 7 [31]$

4] Montrer que:  $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad 3a_{3k+1} \equiv 0 [31]$ .

En déduire que:

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad 31 \mid a_{3k+1}$$

5] Montrer que:

Si  $n \equiv 1 [30]$ , alors l'équation  $a_n x + 31 y = 1$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

### Solution

1]. On a:  $a_1 = 31$  et 31 est premier.

Donc:  $a_1$  est premier.

$$(\text{On a: } 2^1 < 31, 3^1 < 31, 5^1 < 31$$

$$\text{et } 31 \equiv 1 [2], 31 \equiv 1 [3] \text{ et } 31 \equiv 1 [5]$$

• Les nombres premiers positifs dont le carré est inférieur ou égal à  $a_2 = 331$  sont:

2, 3, 5, 7, 11 et 13. Or 331 n'est divisible par aucun d'eux car:

$$331 \equiv 1 [2], 331 \equiv 1 [3], 331 \equiv 1 [5]$$



$$31 \equiv 2 [7], 331 \equiv 1 [41] \text{ et } 331 \equiv 6 [43]$$

Donc :  $a_2$  est un nombre premier.

$$1) \text{ On a : } 3a_n = \underbrace{999 \dots 93}_{n \text{ fois}} \quad (n \text{ fois le chiffre } 9)$$

$$3a_n = \underbrace{999 \dots 99}_{(n+1) \text{ fois}} - 6 \quad (n+1 \text{ fois le chiffre } 9)$$

$$\text{Comme } \underbrace{99 \dots 99}_{(n+1) \text{ fois}} = 10^{n+1} - 1, \text{ alors :}$$

$$3a_n = 10^{n+1} - 7.$$

$$\text{D'où : } 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$2) \text{ 31 est premier et } 31 \wedge 10 = 1 \quad (0 < 10 < 31)$$

D'après le théorème de Fermat, on a :

$$10^{30} \equiv 1 [31]$$

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}. \text{ On a : } (10^{30})^k \equiv 1 [31]$$

c'est-à-dire :

$$10^{30k} \equiv 1 [31]$$

$$\text{Donc : } 10^{30k} \times 10^l \equiv 100 [31]$$

$$\text{c'est-à-dire : } 10^{30k+l} \equiv 100 [31]$$

$$\text{Comme } 100 = 3 \times 31 + 7, \text{ alors : } 100 \equiv 7 [31].$$

$$\text{D'où : } (\forall k \in \mathbb{N}) \quad 10^{30k+l} \equiv 7 [31].$$

3) Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\text{On a : } 3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+l}$$

$$\text{et } 10^{30k+l} \equiv 7 [31]$$

$$\text{Donc : } 3a_{30k+1} + 7 \equiv 7 [31]$$

$$\text{Donc : } 3a_{30k+1} \equiv 0 [31]$$

Il en découle que :  $31 \mid 3a_{30k+1}$

Comme  $31 \wedge 3 = 1$ , alors d'après le théorème de Gauss :

$$31 \mid a_{30k+1}$$

5) Supposons que :  $n \equiv 1 [30]$  c'est-à-dire qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que :  $n = 30k + 1$ .

$$\text{D'après 4), on a : } 31 \mid a_{30k+1}$$

c'est-à-dire :  $31 \mid a_n$ . Par suite

$31$  divise  $a_n x + 31y$  pour tout  $(x, y)$

de  $\mathbb{Z}^2$  ; ce qui implique que  $a_n x + 31y \neq 1$ .

Par conséquent :

Si  $n \equiv 0 [30]$ , alors l'équation

$$a_n x + 31y = 1 \text{ n'admet pas de solution.}$$

156 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{On pose : } b_n = 2 \times 10^n + 1 \text{ et } c_n = 2 \times 10^n - 1$$

1) Montrer que :  $b_n \wedge c_n = c_n \wedge b_n$ .

On déduit que :  $b_n \wedge c_n = 1$

2) Trouver un couple  $(x_n, y_n)$  de  $\mathbb{Z}^2$  tel que :  $b_n x_n + c_n y_n = 1$

Solution

$$1) \text{ On a : } b_n = c_n + 2$$

$$\text{Donc : } b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$$

de façon plus générale si  $b$  et  $c$  sont deux entiers relatifs tels que :

$$b = ac + \beta \quad \text{ou} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$\text{alors } b \wedge c = c \wedge \beta$$

On sait que si  $c$  est un nombre impair, alors  $c \wedge 2 = 1$ .

Comme  $c_n$  est impair ( $c_n = 2 \times 10^n - 1$ ),

$$\text{alors : } c_n \wedge 2 = 1.$$

$$\text{D'où : } b_n \wedge c_n = 1.$$

$$2) \text{ On a : } b_n = c_n + 2 \text{ et } c_n = (10^n - 1) \times 2 + 1$$

$$\text{Donc : } 1 = c_n - (10^n - 1) \times 2$$

$$1 = c_n - (10^n - 1)(b_n - c_n).$$

$$\text{D'où : } (1 - 10^n)b_n + 10^n c_n = 1$$

$$\text{Prendre : } x_n = 1 - 10^n \text{ et } y_n = 10^n$$

157 Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que :  $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$ .

1) Sachant que :  $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$ , montrer que :  $1436 \wedge 2015 = 1$ .

2) Soit  $d$  un diviseur commun de  $x$  et de  $2015$ .

a) Montrer que :  $d$  divise  $1436$ .

b) En déduire que :  $x \wedge 2015 = 1$ .

3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :

$$x^{1440} \equiv 1 [5] \text{ et } x^{1440} \equiv 1 [13] \text{ et } x^{1440} \equiv 1 [31]$$

(remarquer que :  $2015 = 5 \times 13 \times 31$ )

b) Montrer que  $x^{1440} \equiv 1 [65]$  et en

déduire que :  $x^{1440} \equiv 1 [2015]$ .

4) Montrer que :  $x \equiv 1051 [2015]$ .

Solution

$$1) \text{ On a : } 1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1.$$



D'après le théorème de Bézout:  $1436 \wedge 2015 = 1$ .

2] Soit  $d \mid x$  et  $d \mid 2015$ ,

a) Comme  $x^{1439} \equiv 1436 \pmod{2015}$ , alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que:  $x^{1439} - 1436 = 2015k$   
c'est-à-dire:  $1436 = x^{1439} - 2015k$

Comme  $d \mid x$  et  $d \mid 2015$ , alors:

$$d \mid x^{1439} - 2015k$$

Où:  $d$  divise  $1436$

b) Soit  $\delta = x \wedge 2015$ :  $\delta \mid x$  et  $\delta \mid 2015$ .

D'après la question précédente:  $\delta \mid 1436$ ;

et puisque:  $\delta \mid 2015$ , alors  $\delta \mid 1436 \wedge 2015$

c'est-à-dire  $\delta \mid 1$ . Donc:  $\delta = 1$

$$\text{Ainsi: } x \wedge 2015 = 1$$

3] a) On a:  $2015 = 5 \times 13 \times 31$  et  $x \wedge 2015 = 1$ .

Donc:  $x \wedge 5 = 1$  et  $x \wedge 13 = 1$  et  $x \wedge 31 = 1$ .

Et 5, 13 et 31 sont premiers; d'après le théorème de Fermat:

$$x^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{ et } x^{12} \equiv 1 \pmod{13} \text{ et } x^{30} \equiv 1 \pmod{31}$$

Donc:

$$(x^4)^{360} \equiv 1 \pmod{5} \text{ et } (x^{12})^{160} \equiv 1 \pmod{13} \text{ et } (x^{30})^{68} \equiv 1 \pmod{31}$$

Où:

$$x^{1440} \equiv 1 \pmod{5} \text{ et } x^{1440} \equiv 1 \pmod{13} \text{ et } x^{1440} \equiv 1 \pmod{31}$$

b) • On a:  $5 \mid x^{1440} - 1$  et  $13 \mid x^{1440} - 1$  et  $5 \wedge 13 = 1$

Donc:  $5 \times 13 \mid x^{1440} - 1$ , c'est-à-dire:  $65 \mid x^{1440} - 1$ .

Où:

$$x^{1440} \equiv 1 \pmod{65}$$

• On a:

$$\begin{cases} 65 \mid x^{1440} - 1 \text{ et } 31 \mid x^{1440} - 1 \\ 65 \times 31 = 1 \text{ (car } 5 \wedge 31 = 1 \text{ et } 13 \wedge 31 = 1) \end{cases}$$

Donc:  $65 \times 31 \mid x^{1440} - 1$ ,

c'est-à-dire:  $2015 \mid x^{1440} - 1$ .

Où:

$$x^{1440} \equiv 1 \pmod{2015}$$

4] On a:  $x^{1439} \equiv 1436 \pmod{2015}$  (hypothèse)

Donc:  $x \times x^{1439} \equiv 1436 \times x \pmod{2015}$ ,

c'est-à-dire:  $x^{1440} \equiv 1436x \pmod{2015}$

D'après 3], on a:  $x^{1440} \equiv 1 \pmod{2015}$

Donc:  $1436x \equiv 1 \pmod{2015}$

Par suite:  $1436 \times 1051 \times x \equiv 1051 \pmod{2015}$

Par ailleurs:  $1436 \times 1051 = 1 + 2015 \times 749$

Donc:  $1436 \times 1051 \equiv 1 \pmod{2015}$

Il vient aussitôt:  $1436 \times 1051 \times x \equiv x \pmod{2015}$

Où:  $x \equiv 1051 \pmod{2015}$

(158) 1] a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux, alors  $a^{2016} \equiv 1 \pmod{13}$

2] On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation

$$(E): x^{2015} \equiv 2 \pmod{13}$$

Soit x une solution de l'équation (E).

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) Montrer que:  $x \equiv 7 \pmod{13}$ .

3] Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est  $S = \{7 + 13k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

### Solution

1] Soit  $a \in \mathbb{Z}$  tel que:  $a \wedge 13 = 1$ .

Comme 13 est un nombre premier, alors d'après le théorème de Fermat:  $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ .

Donc:  $(a^{12})^{168} \equiv 1 \pmod{13}$ , c'est-à-dire:  $a^{2016} \equiv 1 \pmod{13}$ .

Où:  $(\forall a \in \mathbb{Z}) \quad a \wedge 13 = 1 \Rightarrow a^{2016} \equiv 1 \pmod{13}$ .

2] a) Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que:  $x^{2015} \equiv 2 \pmod{13}$

Alors: 13 ne divise pas  $x^{2015}$  et  $x^{2015} \wedge 13 = 1$

Donc:  $x \wedge 13 = 1$ .

(Par l'inverse si  $x \wedge 13 \neq 1$ , alors  $x \wedge 13 = 13$  (13 étant premier) c'est-à-dire 13 divise x et 13 divise  $x^{2015}$  on en tire  $x^{2015} \wedge 13 = 13$ , ce qui contredit l'hypothèse).

Où:  $x \wedge 13 = 1$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que  $x^{2015} \equiv 2 \pmod{13}$

Comme  $x \wedge 13 = 1$ , alors d'après le résultat de 1], on a:  $x^{2016} \equiv 1 \pmod{13}$

De  $x^{2015} \equiv 2 \pmod{13}$ , on tire:  $x^{2015} \times x \equiv 2x \pmod{13}$

c'est-à-dire:  $x^{2016} \equiv 2x \pmod{13}$ .

Donc:  $2x \equiv 1 \pmod{13}$  ou encore:  $2x \equiv 14 \pmod{13}$

Donc:  $13 \mid 2(x - 7)$ . Comme  $13 \wedge 2 = 1$ , alors

par le théorème de Gauss  $13 \mid x - 7$ .

Donc:  $x \equiv 7 \pmod{13}$

3]. On a:  $x \in S \Rightarrow x \equiv 7 \pmod{13}$

• Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que:  $x \equiv 7 \pmod{13}$ .

On a:  $x^{2015} \equiv 7^{2015} \pmod{13}$



Forme  $7x \equiv 1$ , alors d'après le théorème de  
 Fermat, on a:  $7^{16} \equiv 1 [13]$   
 On a:  $(7^{16})^{167} \equiv 1 [13]$ , c'est-à-dire:  
 $7^{2672} \equiv 1 [13]$  et par suite:  $7^{2004} \times 7^{668} \equiv 7^{11} [13]$ ;  
 par conséquent:  $7^{2005} \equiv 7^{11} [13]$   
 Par ailleurs:  $7 \times 7^{11} \equiv 1 [13]$ .  
 On a:  $2 \times 7 \times 7^{11} \equiv 1 [13]$   
 $14 \times 7^{11} \equiv 2 [13]$ .  
 Comme:  $14 \equiv 1 [13]$ , alors  $14 \times 7^{11} \equiv 7^{11} [13]$ .  
 On a:  $7^{11} \equiv 2 [13]$ .  
 Ce qui implique que:  $7^{2005} \equiv 2 [13]$ .  
 On a:  $x^{2005} \equiv 2 [13]$   
 Finalement:  $x \equiv 7 [13] \Rightarrow x \in S$ .  
 On définit:  $x \in S \Leftrightarrow x \equiv 7 [13]$   
 On conclut:  $S = \{7 + 13k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

199. A. Soit  $(a; b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que le nombre  
 premier 173 divise  $a^3 + b^3$ .  
 1) Montrer que:  $a^{173} \equiv -b^{173} [173]$  (remarquer  
 que:  $173 = 3 \times 57$ ).  
 2) Montrer que 173 divise  $a$  si et seulement si  
 173 divise  $b$ .  
 3) On suppose que 173 divise  $a$ .  
 Montrer que: 173 divise  $a + b$ .  
 4) On suppose que 173 ne divise pas  $a$ .  
 a) En utilisant le théorème de Fermat,  
 montrer que:  $a^{173} \equiv b^{173} [173]$ .  
 b) Montrer que:  $a^{173} (a + b) \equiv 0 [173]$ .  
 c) En déduire que 173 divise  $a + b$ .  
 5) On considère dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  l'équation  
 $(E): x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$   
 6) Soit  $(x; y)$  un élément de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  solution  
 de l'équation (E). On pose  $x + y = 173k$   
 avec  $k \in \mathbb{N}^*$ .  
 a) Vérifier que:  $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$   
 b) Montrer que:  $k = 1$ .  
 7) Résoudre l'équation (E).

Solution

On a:  $a^3 \equiv -b^3 [173]$ . Donc:  $(a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57} [173]$   
 c'est-à-dire:  $a^{2019} \equiv -b^{2019} [173]$ .

D'où:  $a^{173} \equiv -b^{173} [173]$ .  
 2) Comme 173 est premier, alors:  
 $173 \mid a \Leftrightarrow 173 \mid a^3$   
 Comme  $173 \mid a^3 + b^3$ , alors  
 $173 \mid a \Leftrightarrow \begin{cases} 173 \mid a^3 \\ 173 \mid a^3 + b^3 \end{cases} \Leftrightarrow 173 \mid b^3$   
 D'où:  $173 \mid a \Leftrightarrow 173 \mid b$ .

3) On suppose que  $173 \mid a$ .  
 D'après 2) A., on a:  $173 \mid b$ .  
 Donc:  $173 \mid a + b$ .  
 4) On suppose que 173 ne divise pas  $a$ .

a) D'après 2) a), on a:  $173 \nmid b$   
 D'après le théorème de Fermat, on a:  
 $a^{173} \equiv 1 [173]$  et  $b^{173} \equiv 1 [173]$   
 Donc:  $a^{173} \equiv -b^{173} [173]$

b) On a:  $a^{173} \equiv -b^{173} [173]$  et  $a^{173} \equiv b^{173} [173]$

On a:  $b \times a^{173} \equiv -b^{174} [173]$   
 et par suite:  $b \times a^{173} \equiv -a^{174} [173]$

On a:  $a^{173} + a^{173}b \equiv 0 [173]$ ,  
 c'est-à-dire:  $a^{173}(a + b) \equiv 0 [173]$ .

c) On a:  $173 \nmid a$ ; donc  $173 \nmid a^{173}$  et  $a^{173} \equiv 1 [173]$   
 Comme  $173 \mid a^{173} + b^{173} \equiv 1 + b^{173}$ ,  
 alors d'après le théorème de Gauss:  
**173 divise  $a + b$**

B. 1) a) On a:  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 173(xy + 1)$   
 Comme  $x + y = 173k$ , alors:

$$173k[(x - y)^2 + xy] = 173(xy + 1)$$

$$k(x - y)^2 + kxy = xy + 1$$

$$\text{Donc: } k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$$

b) On a:  $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$   
 et  $k(x - y)^2 \in \mathbb{N}$  et  $(k - 1)xy \in \mathbb{N}$  (car  $k \in \mathbb{N}^*$ )  
 Deux cas se présentent.

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } (k - 1)xy = 1 \text{ et } k(x - y)^2 = 0$$

On aura:  $k - 1 = x = y = 1$  c'est-à-dire  $\begin{cases} x = y = 1 \\ k = 2 \end{cases}$   
 et cela implique:  $173k = 346$  et  $x + y = 2$ ;  
 ce qui contredit que:  $173k = x + y$ .

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } (k - 1)xy = 0 \text{ et } k(x - y)^2 = 1$$

$$\text{On aura: } k = 1$$

2) Soit  $S$  l'ensemble des solutions de (E) dans  
 $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .



• On a:  $(x; y) \in S \Rightarrow \begin{cases} x+y=173 \\ (x-y)^2=1 \end{cases}$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=-1 \end{cases}$   
 $\Rightarrow \begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases}$   
 $(x; y) \in S \Rightarrow [(x; y)=(87; 86) \text{ ou } (x; y)=(86; 87)]$

• On a:  
 $87^3 + 86^3 = (87+86)(87^2 - 87 \times 86 + 86^2)$   
 $87^3 + 86^3 = 173(87(87-86) + 86^2)$   
 $87^3 + 86^3 = 173(87+86^2)$   
 $87^3 + 86^3 = 173(1+86 \times 87)$   
 Donc:  $(87; 86)$  et  $(86; 87)$  appartiennent à  $S$ .  
 • Conclusion:  $S = \{(87; 86); (86; 87)\}$

**(160)** On admet que 2017 est premier, et que  $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ .

Soit  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1] Soit  $(x; y)$  un couple de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que:

$$px + y^{p-1} = 2017$$

a] Vérifier que:  $p < 2017$ .

b] Montrer que  $p$  ne divise pas  $y$ .

c] Montrer que:  $y^{p-1} \equiv 1[p]$ .

On déduit que:  $p$  divise 2016.

d] Montrer que:  $p=7$ .

e] Déterminer, selon les valeurs de  $p$ , les couples  $(x; y)$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  vérifiant  $px + y^{p-1} = 2017$ .

Solution

1] a) Comme  $(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , c'est-à-dire:

$1 \leq x$  et  $1 \leq y$ , alors:

$$p \leq px \text{ et } 1 \leq y^{p-1}$$

$$\text{Donc: } p+1 \leq px + y^{p-1}$$

$$\text{et par suite: } p+1 \leq 2017.$$

$$\text{D'où: } p < 2017$$

b] Raisonnons par l'absurde.

Supposons que  $p$  divise  $y$ .

Alors  $p | y^{p-1}$ . Comme  $p | px$ , alors

$p | px + y^{p-1}$  c'est-à-dire  $p | 2017$

Ce qui contredit le fait que  $p < 2017$  et  $p \nmid 2017$ .  
 Donc:  $p$  ne divise pas  $y$ .

c]  $p$  est un nombre premier et  $p$  ne divise pas  $y$ .  
 D'après le théorème de Fermat:  $y^{p-1} \equiv 1[p]$

• Par ailleurs:  $px \equiv 0[p]$ .

$$\text{Donc: } px + y^{p-1} \equiv 1[p], \text{ c'est-à-dire: } 2017 \equiv 1[p].$$

$$\text{D'où: } p \text{ divise } 2016.$$

d) On a:  $p | 2016$  et  $p$  premier et  $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$  et  $p \geq 5$ . Donc:  $p=7$ .

e] Soit  $p$  un nombre premier positif.

$$\text{Soit } S_p = \{(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid px + y^{p-1} = 2017\}$$

1<sup>er</sup> cas:  $p=2$

Soit  $(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On a:

$$(x; y) \in S_2 \Leftrightarrow 2x + y = 2017$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 2017 \\ y = 2017 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 1008 \\ y = 2017 - 2x \end{cases}$$

D'où: Pour  $p=2$ ,

$$S_2 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 2x + y = 17\}$$

$$S_2 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq 1008 \text{ et } y = 2017 - 2x\}$$

2<sup>e</sup> cas:  $p=3$

Soit  $(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On a:

$$(x; y) \in S_3 \Leftrightarrow 3x + y^2 = 2017.$$

$$\text{• Est on a: } \begin{cases} 3x + y^2 = 2017 \Rightarrow y^2 < 2017 \\ 3x + y^2 = 2017 \Rightarrow y^2 \equiv 1[3] \end{cases}$$

$$(\text{car } 2017 \equiv 1[3] \text{ et } 3x \equiv 0[3])$$

$$\text{Donc: } 3x + y^2 = 2017 \Rightarrow 1 \leq y \leq 44$$

$$3x + y^2 = 2017 \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 1[3] \\ \text{ou} \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$$

$$3x + y^2 = 2017 \Rightarrow \begin{cases} y = 3k+1; k \in \mathbb{N} \\ \text{ou} \\ y = 3k+2; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

• Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a:

$$1 \leq 3k+1 \leq 44 \Leftrightarrow 0 \leq 3k \leq 43 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 14$$

$$1 \leq 3k+2 \leq 44 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 14$$

• Soit  $(x; y) \in S_3$  tel que:  $y = 3k+1$  et  $0 \leq k \leq 14$

$$\text{On a: } 3x + (3k+1)^2 = 2017$$

$$\text{Donc: } x = 676 - 3k^2 - 2k$$

Soit  $(x, y) \in S_3$  tel que:  
 $y = 3x + 1$  et  $0 \leq x \leq 14$

On a:  $3x + (3x + 1)^6 = 2017$

Donc:  $x = 671 - 3x^6 - 4x$

On: Pour  $p=3$ ,

$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 3x + y^6 = 2017\}$

$S_3 = \{(671 - 3x^6 - 4x, 3x + 1) \mid 0 \leq x \leq 14\} \cup$   
 $\cup \{(671 - 3x^6 - 4x, 3x + 1) \mid 0 \leq x \leq 14\}$

1<sup>er</sup> cas:  $p \geq 5$

D'après ce qui précède,

1) Si  $p=5$  ou  $p \geq 5$ , alors  $S_p = \emptyset$

2) Étudions le cas  $p=7$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

On a:  $(x, y) \in S_7 \Leftrightarrow 7x + y^7 = 2017$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^7 < 2017 \\ 7x + y^7 = 2017 \end{cases}$

On  $y^7 < 2017 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow y \in \{1, 2, 3\}$

On a:  $(x, 1) \in S_7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2016 \\ y = 1 \end{cases}$

$(x, 1) \in S_7 \Leftrightarrow (x, y) = (288, 1)$

On a:  $(x, 2) \in S_7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 1953 \\ y = 2 \end{cases}$

$(x, 2) \in S_7 \Leftrightarrow (x, y) = (279, 2)$

On a:  $(x, 3) \in S_7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 1888 \\ y = 3 \end{cases}$

$(x, 3) \in S_7 \Leftrightarrow (x, y) = (269, 3)$

Donc:  $S_7 = \{(288, 1); (279, 2); (269, 3)\}$

On peut vérifier que les derniers couples sont effectivement des solutions de l'équation

$7x + y^7 = 2017$

On effectue:

$7 \times 288 + 3^7 = 2016 + 27 = 2043$

$7 \times 279 + 2^7 = 1953 + 128 = 2081$

$7 \times 269 + 1^7 = 1883 + 1 = 1884$

Remarque:

On peut refaire l'exercice en remplaçant 2017 par le nombre premier 2027

(16) Soit  $p$  un nombre premier qui s'écrit  
 $p = 3 + 4k$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que:

$(\forall x \in \mathbb{Z}) (x^p \equiv 1 [p] \Rightarrow x^{p-5} \equiv 1 [p])$

2) Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que:  $x^{p-5} \equiv 1 [p]$

a) Montrer que:  $x \wedge p = 1$

b) Montrer que:  $x^{p-1} \equiv 1 [p]$

c) Vérifier que:  $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$

d) En déduire que:  $x^k \equiv 1 [p]$

3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation:  $x^{67} \equiv 1 [67]$

Solution

1) Soit  $x \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $x^p \equiv 1 [p]$

Alors:  $(x^p)^{k-1} \equiv 1 [p]$ , c'est-à-dire:  $x^{pk-k} \equiv 1 [p]$

Or  $p-5 = 4k-2$ , alors:  $x^{p-5} \equiv 1 [p]$

En conclusion:

$(\forall x \in \mathbb{Z}) (x^p \equiv 1 [p] \Rightarrow x^{p-5} \equiv 1 [p])$

2) Dans cette question  $x \in \mathbb{Z}$  et  $x^{p-5} \equiv 1 [p]$

Donc:  $p$  ne divise pas  $x^{p-5}$  et par suite:

$p$  ne divise pas  $x$  (car  $x$  est premier).

D'où:  $x \wedge p = 1$  (d'où que:  $x^{p-1} \equiv 1 [p]$ )

b) Comme  $p$  est premier et  $x \wedge p = 1$ , alors d'après le théorème de Fermat:  $x^{p-1} \equiv 1 [p]$

c) On a:  $2 + (k-1)(p-1) - k(p-5) = 2 - p + 5k - (k-1)$   
 $= 2 + (k-1)(p-1) - k(p-5) = 4k + 3 - p = 0$

Donc:  $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$

d) On a:  $x^{p-5} \equiv 1 [p]$  (hypothèse).

Donc:  $(x^{p-5})^k \equiv 1 [p]$ , c'est-à-dire  $x^{k(p-5)} \equiv 1 [p]$

On a:  $x^{p-1} \equiv 1 [p]$  (d'après 1) b).

Donc:  $(x^{p-1})^{k-1} \equiv 1 [p]$ , c'est-à-dire  $x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1 [p]$

Par suite:  $x^k \times x^{(k-1)(p-1)} \equiv x^p [p]$

c'est-à-dire:  $x^k + (k-1)(p-1) \equiv x^p [p]$

Comme  $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$ , alors:

$x^k \equiv 1 [p]$

3) 67 est un nombre premier (à vérifier)

et  $67 = 3 + 4 \times 16$ ; on a:  $66 = 67 - 1$

D'après ce qui précède:

$x^{66} \equiv 1 [67] \Leftrightarrow x^k \equiv 1 [67]$

Par ailleurs:

$x^k \equiv 1 [67] \Leftrightarrow 67 \mid (x-1)(x+1)$



Comme 67 est premier, alors

$$x^k \equiv 1 [67] \Leftrightarrow (67 | x-1 \text{ ou } 67 | x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x \equiv 1 [67] \text{ ou } x \equiv 66 [67])$$

Donc:  $x^{66} \equiv 1 [67] \Leftrightarrow (x \equiv 1 [67] \text{ ou } x \equiv 66 [67])$

En conclusion:

l'ensemble des solutions de l'équation

$$x^{66} \equiv 1 [67], \text{ dans } \mathbb{Z}, \text{ est}$$

$$S = \{67k+1 | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{67k+66 | k \in \mathbb{Z}\}$$

(162) On admet que 2969 est un nombre premier.

Soit  $(n; m) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant:  $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$

1] Dans cette question, on suppose que:

2969 ne divise pas  $n$

a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que:  $(\exists u \in \mathbb{Z}); uxv \equiv 1 [2969]$

b) En déduire que:

$$(uxm)^8 \equiv -1 [2969] \text{ et } (uxm)^{2968} \equiv -1 [2969]$$

(On remarquera que:  $2968 = 8 \times 371$ )

c) Montrer que: 2969 ne divise pas  $uxm$ .

d) En déduire que l'on a aussi:

$$(uxm)^{2968} \equiv 1 [2969].$$

2] a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise  $n$ .

b) Montrer que:

$$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969] \Leftrightarrow (n \equiv 0 [2969] \text{ et } m \equiv 0 [2969])$$

Solution

1] a) 2969 est un nombre premier et  $2969 \nmid n=1$  (car 2969 ne divise pas  $n$  et 2969 premier)

D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que:

$$uxn - 2969v = 1$$

C'est-à-dire tels que:  $uxn = 1 + 2969v$

Et on a:  $1 + 2969v \equiv 1 [2969]$ .

Où:  $(\exists u \in \mathbb{Z}); uxv \equiv 1 [2969]$

b) On en déduit  $(uxm)^8 \equiv 1 [2969]$

Par ailleurs:  $(uxm)^8 = u^8 x^8 m^8$

et  $m^8 \equiv -n^8 [2969]$ .

Donc:  $(uxm)^8 \equiv u^8 x^8 (-n^8) [2969]$

$$(uxm)^8 \equiv -(uxn)^8 [2969]$$

Où:  $(uxm)^8 \equiv -1 [2969]$

• Il s'ensuit que:  $[(uxm)^8]^{371} \equiv (-1)^{371} [2969]$

C'est-à-dire:  $(uxm)^{8 \times 371} \equiv (-1)^{371} [2969]$

Comme  $(-1)^{371} = -1$  et  $8 \times 371 = 2968$ ,

alors:  $(uxm)^{2968} \equiv -1 [2969]$

c) 2969 est premier et 2969 ne divise pas  $(uxm)^{2968}$ .

Donc: 2969 ne divise pas  $uxm$

d) 2969 ne divise pas  $uxm$ .

Comme 2969 est premier, alors d'après le théorème de Fermat:

$$(uxm)^{2968} \equiv 1 [2969]$$

2] a) Raisonnons par l'absurde et supposons que 2969 ne divise pas  $n$ .

D'après les résultats de 1], on aura:

$$\begin{cases} (uxm)^{2968} \equiv -1 [2969] \\ (uxm)^{2968} \equiv 1 [2969] \end{cases}$$

$$\begin{cases} (uxm)^{2968} \equiv -1 [2969] \\ (uxm)^{2968} \equiv 1 [2969] \end{cases}$$

On aura:  $1 \equiv -1 [2969]$

Ce qui est impossible (car cela implique que 2969 divise 2)

Donc:

Si  $(n; m) \in \mathbb{N}^2$  vérifie  $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$ , alors 2969 divise  $n$ .

b) Soit  $(n; m) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$ .

Alors  $2969 | n$  c'est-à-dire  $n \equiv 0 [2969]$ .

Donc:  $n^8 \equiv 0 [2969]$  et par suite  $m^8 \equiv 0 [2969]$

C'est-à-dire  $2969 | m^8$ . Donc:  $2969 | m$  (car 2969 est premier)

Ainsi:

$$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969] \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0 [2969] \\ m \equiv 0 [2969] \end{cases}$$

• Il est clair que:

$$\begin{cases} n \equiv 0 [2969] \\ m \equiv 0 [2969] \end{cases} \Rightarrow n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$$

Conclusion:

Pour  $(n; m) \in \mathbb{N}^2$

$$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969] \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0 [2969] \\ m \equiv 0 [2969] \end{cases}$$

163 On considère, dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation  
(D):  $7x^3 - 13y = 5$ .

- 1) Soit  $(x; y)$  une solution de (D).  
 a) Montrer que:  $x \wedge 13 = 1$ .  
 b) En déduire que:  $x^{16} \equiv 1 [13]$   
 c) Montrer que:  $x^3 \equiv 10 [13]$   
 d) En déduire que:  $x^{16} \equiv 3 [13]$   
 2) Déduire des questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

Solution

- 1) Soit  $(x; y)$  une solution de (D):  $\begin{cases} (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \\ 7x^3 - 13y = 5 \end{cases}$   
 a) Soit  $\delta = x \wedge 13$ .  
 $(\delta | x \text{ et } 5 [13]) \Rightarrow (\delta | 7x^3 - 13y \text{ et } 5 [13])$   
 $\Rightarrow \delta | 5 \text{ et } \delta | 13$   
 Comme  $5 \wedge 13 = 1$ , alors  $\delta = 1$ .  
 Donc:  $x \wedge 13 = 1$   
 b) 13 est un nombre premier et  $x \wedge 13 = 1$ .  
 D'après le théorème de Fermat:  $x^{16} \equiv 1 [13]$   
 c) On a:  $7x^3 = 5 + 13y$   
 Donc:  $7x^3 \equiv 5 [13]$   
 Donc:  $2x \cdot 7x^3 \equiv 10 [13]$   
 Comme:  $2x \cdot 7 \equiv 1 [13]$ , alors:  $2x \cdot 7x^3 \equiv x^3 [13]$   
 Où:  $x^3 \equiv 10 [13]$ .  
 d) On a:  $x^3 \equiv -3 [13]$ .  
 Donc:  $(x^3)^4 \equiv (-3)^4 [13]$ ,  
 c'est-à-dire  $x^{16} \equiv 3^4 [13]$   
 Par ailleurs  $3^4 = 81 = 6 \times 13 + 3$ , donc:  
 $3^4 \equiv 3 [13]$ .  
 Donc:  $x^{16} \equiv 3 [13]$ .

2) Raisonnons par l'absurde.  
 Supposons que l'équation (D):  $7x^3 - 13y = 5$ ,  
 admet une solution  $(x; y)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .  
 D'après ce qui précède, on aura  
 $x^{16} \equiv 1 [13]$  (d'après 1) b))  
 et  $x^{16} \equiv 3 [13]$  (d'après 1) d))  
 On aurait  $3 \equiv 1 [13]$ ,  
 c'est-à-dire 13 divise 2; ce qui est impossible.  
 Donc, l'équation (D) n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

164 Soit  $p$  et  $q$  deux nombres premiers positifs  
 tels que:  $p < q$  et  $9p+q-1 \equiv 1 [pq]$ .

- 1) a) Montrer que:  $p \wedge q = 1$ .  
 b) En déduire que:  
 $9p-1 \equiv 1 [p]$  et  $9q \equiv 1 [p]$   
 2) a) Montrer que:  $(p-1) \wedge q = 1$   
 b) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que:  $p = 6$ .  
 3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que:  
 $9q-1 \equiv 1 [q]$   
 b) En déduire que:  $q = 5$ .

Solution

- 1) Comme:  $9p+q-1 \equiv 1 [pq]$ , alors  $pq | 9p+q-1-1$   
 c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{N}$  tel que:  
 $9p+q-1-1 = \alpha pq$   
 ou encore  $9 \times 9p+q-1 - p(qq) = 1$   
 Comme  $p < q$ , alors  $p+q \geq 2+p \geq 5$ ,  
 et par suite  $p+q-1 \geq 3$ .  
 Ainsi  $9p-pq=1$  où  $u = 9p+q-1$  et  $v = -q$   
 et  $(u; v) \in \mathbb{N}^2$ .  
 D'après le théorème de Bézout:  $p \wedge q = 1$

Autre solution

- On a:  $9p+q-1 \equiv 1 [pq]$ .  
 Comme  $p$  divise  $pq$ , alors  $9p+q-1 \equiv 1 [p]$ .  
 Donc:  $p$  ne divise pas  $9p+q-1$  et puisque  
 $p$  est premier, alors  $p$  ne divise pas 9.  
 Donc:  $p \wedge q = 1$   
 2) a) On a:  $1 \leq p-1 < p < q$ . Donc:  $1 \leq p-1 < q$   
 Comme  $q$  est premier, alors:  $(p-1) \wedge q = 1$ .  
 b) Comme  $(p-1) \wedge q = 1$ , alors d'après le  
 théorème de Bézout, il existe  $(\lambda; \mu) \in \mathbb{Z}^2$   
 tel que:  $(p-1)\lambda - q\mu = 1$   
 Effectuons la division euclidienne de  
 $\lambda$  par  $q$ : Il existe  $(t; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel  
 que  $\lambda = qt + r$  et  $0 \leq r < q$ .  
 Donc:  $(p-1)(qt+r) - q\mu = 1$   
 $(p-1)r - q(\mu - (p-1)t) = 1$   
 $qs = (p-1)r - 1$  où  $s = \mu - (p-1)t$



On a:  $(p-1)r \geq 0$  (car  $r \geq 0$  et  $p-1 \geq 1$ )

Donc  $qs \geq -1$

On ne peut pas avoir  $qs = -1$  (car  $q \geq 3$ )

Donc:  $qs \geq 0$  (car  $qs$  est un entier)

Comme  $q \geq 3$ , alors  $s \in \mathbb{N}$ .

Ainsi:  $(\exists (r, s) \in \mathbb{N}^2) : (p-1)r - qs = 1$

Par ailleurs:  $g^{p-1} \equiv 1[p]$  et  $g^q \equiv 1[p]$

Donc:  $(g^{p-1})^r \equiv 1[p]$  et  $(g^q)^s \equiv 1[p]$

c'est-à-dire:

$$g^{(p-1)r} \equiv 1[p] \text{ et } g^{qs} \equiv 1[p]$$

$$g^{(p-1)r} \equiv 1[p] \text{ et } g^{qs} \times g^q \equiv g^q[p]$$

$$g^{(p-1)r} \equiv 1[p] \text{ et } g^{qs+1} \equiv g^q[p]$$

Comme  $(p-1)r = qs+1$ , alors  $g \equiv 1[p]$

Donc:  $p$  divise 8.

Puisque  $p$  est premier, alors:  $p=2$

3) a) On a:  $p|g^{p+q-1}$  et  $q|p^q$ .

Alors:  $q|g^{p+q-1}$  et  $g^{p+q-1} \equiv 1[q]$

Donc:  $q$  ne divise pas  $g^{p+q-1}$

Comme  $q$  est premier, alors  $q$  ne divise pas  $g$ . Donc:  $g \wedge q = 1$ .

D'après le théorème de Fermat:  $g^{q-1} \equiv 1[q]$

b) On a:  $g \equiv 1[2]$ ; donc:  $g^{q-1} \equiv 1[2]$   
c'est-à-dire  $2|g^{q-1}-1$ .

D'autre part  $q|g^{q-1}-1$  (car  $g^{q-1} \equiv 1[q]$ )

Comme  $q$  est premier et  $2 \nmid q$ , alors  $2q|g^{q-1}-1$ .

Où:  $g^{q-1} \equiv 1[2q]$ .

• Par hypothèse  $g^{p+q-1} \equiv 1[2q]$ .

Donc:  $g^{q+1} \equiv 1[2q]$

• De  $g^{q-1} \equiv 1[2q]$ , on déduit que:

$$g^q \times g^{q-1} \equiv g^q[2q], \text{ c'est-à-dire:}$$

$$g^{q+1} \equiv g^q[2q].$$

• Il en résulte que:  $g \equiv 1[2q]$

Donc:  $2q|80$

Par suite:  $q$  divise 40.

Comme  $q$  est un nombre premier supérieur strictement à 2, alors:

$$q=5.$$

165) A. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  
(E):  $47x - 43y = 1$

- 1) Vérifier que le couple  $(11; 12)$  est une solution particulière de l'équation (E).
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E).

B. On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  
(F)  $x^{41} \equiv 4[43]$ .

- 1) Soit  $x \in \mathbb{Z}$  une solution de l'équation (F)

a) Montrer que:  $x \wedge 43 = 1$ .

On déduit que:  $x^{42} \equiv 1[43]$

b) Montrer que:  $4x \equiv 1[43]$ .

On déduit que:  $x \equiv 11[43]$

- 2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F) dans  $\mathbb{Z}$ .

C. On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système de deux équations:

$$(G): \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$$

- 1) Soit  $x$  une solution du système (G).

a) Montrer que  $x$  est solution du système:

$$(H): \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$$

b) On déduit que:  $x \equiv 567[201]$

- 2) Déterminer, dans  $\mathbb{Z}$ , l'ensemble des solutions du système (G).

### Solution

A. 1) On a:  $47 \times 11 - 43 \times 12 = 517 - 516 = 1$ .

Donc:  $(11; 12)$  est une solution de (E).

- 2) Soit  $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$  une solution de l'équation (E).

On a:  $47x - 43y = 1$

$$47x - 43y = 47 \times 11 - 43 \times 12$$

$$47(x-11) = 43(y-12)$$

Donc:  $43|47(x-11)$  et  $43(y-12) = 47(x-11)$

43 et 47 sont deux nombres premiers distincts; donc:  $43 \wedge 47 = 1$ . D'après le théorème de Gauss, on a:

$$43|x-11 \text{ et } 43(y-12) = 47(x-11)$$

Donc, il existe un entier relatif  $k$  tel que:

$$x-11 = 43k \text{ et } 43(y-12) = 47 \times 43k$$

c'est-à-dire tel que:

$$x = 43k + 11 \text{ et } y = 47k + 12$$



autre part :

$$47(43k+11) - 43(47k+10) = 47 \times 11 - 43 \times 10 = 1.$$

Donc, pour  $k \in \mathbb{Z}$ , le couple  $(43k+11, 47k+10)$  est une solution de (E).

En conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans  $\mathbb{Z}^2$  est :

$$S = \{(43k+11, 47k+10) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

B.1] Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que :  $x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$ .

a) 43 ne divise pas  $x^{41}$  et 43 est premier. Alors 43 ne divise pas  $x$ .

$$\text{Donc : } x \wedge 43 = 1.$$

• D'après le théorème de Fermat :

$$x^{42} \equiv 1 \pmod{43}.$$

b) On a :  $x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$ . Donc :  $x^{41} x \equiv 4x \pmod{43}$

c'est-à-dire :  $x^{42} \equiv 4x \pmod{43}$ . Comme

$$x^{42} \equiv 1 \pmod{43}, \text{ alors : } 4x \equiv 1 \pmod{43}.$$

• On a :  $11 \times 4x \equiv 11 \pmod{43}$ , c'est-à-dire

$$44x \equiv 11 \pmod{43}. \text{ Comme } 44 \equiv 1 \pmod{43},$$

$$\text{alors } 44x \equiv x \pmod{43}. \text{ Or : } x \equiv 11 \pmod{43}$$

c] Soit  $x \in \mathbb{Z}$ .

• D'après ce qui précède :  $x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \Rightarrow x \equiv 11 \pmod{43}$ .

• Supposons que  $x \equiv 11 \pmod{43}$ .

$$\text{Alors : } x^{41} \equiv 11^{41} \pmod{43}$$

Comme  $43 \wedge 11 = 1$  et 43 est premier, alors d'après le théorème de Fermat :

$$11^{42} \equiv 1 \pmod{43},$$

$$\text{c'est-à-dire : } 11 \times 11^{41} \equiv 1 \pmod{43}$$

$$\text{Donc : } 44 \times 11^{41} \equiv 4 \pmod{43}$$

$$\text{Comme } 44 \equiv 1 \pmod{43}, \text{ alors } 11^{41} \equiv 4 \pmod{43}$$

$$\text{Or : } x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$$

On a prouvé que :  $x \equiv 11 \pmod{43} \Rightarrow x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$

En conclusion :

$$x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \Leftrightarrow x \equiv 11 \pmod{43}.$$

l'ensemble des solutions, dans  $\mathbb{Z}$ , de l'équation (F) est  $\{11 + 43k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

C.1] a) Soit  $x \in \mathbb{Z}$ .

• D'après B.2], on a :  $x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \Leftrightarrow x \equiv 11 \pmod{43}$

• D'après le théorème de Fermat et puisque 47 est premier, alors  $x^{47} \equiv x \pmod{47}$ .

$$\text{Donc : } x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \Leftrightarrow x \equiv 10 \pmod{47}.$$

• On en déduit que :

$$\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$$

b) Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$

Comme  $527 = 12 \times 43 + 11$  et  $527 = 11 \times 47 + 10$ , alors  $527 \equiv 11 \pmod{43}$  et  $527 \equiv 10 \pmod{47}$ .

Donc :  $\begin{cases} x \equiv 527 \pmod{43} \\ x \equiv 527 \pmod{47} \end{cases}$  c'est-à-dire  $\begin{cases} 43 \mid x - 527 \\ 47 \mid x - 527 \end{cases}$

Comme  $43 \wedge 47 = 1$ , alors :  $43 \times 47 \mid x - 527$ , c'est-à-dire :  $2011 \mid x - 527$  ou encore :  $x \equiv 527 \pmod{2011}$

c]. On a montré que :

$$\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 527 \pmod{2011}$$

• Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que :  $x \equiv 527 \pmod{2011}$ .

Comme  $527 \equiv 11 \pmod{43}$  et  $527 \equiv 10 \pmod{47}$ , alors

$$x \equiv 11 \pmod{43} \text{ et } x \equiv 10 \pmod{47} \text{ (car } 2011 = 43 \times 47)$$

$$\text{Ainsi : } x \equiv 527 \pmod{2011} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$$

• Conclusion :

$$\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv 527 \pmod{2011}$$

l'ensemble des solutions du système (G) est  $T = \{527 + 2011k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(166) Soit  $a$  un entier supérieur ou égal à 2.

On pose :  $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$ .

Soit  $p$  un nombre premier positif impair qui divise  $A$ .

1] a) Montrer que :  $a^7 \equiv 1 \pmod{p}$

On démontre que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) a^{7n} \equiv 1 \pmod{p}$

b) Montrer que  $a \wedge p = 1$ .

On démontre que :  $(\forall m \in \mathbb{N}) a^{(p-1)m} \equiv 1 \pmod{p}$ .

2] On suppose que 7 ne divise pas  $p-1$ .

a) Montrer que :  $a \equiv 1 \pmod{p}$

b) On démontre que :  $p = 7$ .

3] Montrer que si  $p$  est un nombre premier positif impair tel que  $p$  divise  $A$ , alors :

$$p = 7 \text{ ou } p \equiv 1 \pmod{7}.$$

Solution

1] a) On a :  $p \mid A$ . Donc :  $a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$$\text{Donc : } (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\text{c'est-à-dire } a^7 - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$\text{Or : } a^7 \equiv 1 \pmod{p}$$



• On a:  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ . Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $(a^{\frac{p-1}{2}})^n \equiv 1 [p]$ .

D'où:  $(\forall n \in \mathbb{N}) a^{\frac{p-1}{2}n} \equiv 1 [p]$

b). On a:  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ . Donc  $p$  ne divise pas  $a^{\frac{p-1}{2}}$ .  
 Comme  $p$  est premier, alors  $p$  ne divise pas  $a$ .

Donc:  $p \nmid a \Rightarrow a \equiv 1 [p]$

• D'après le théorème de Fermat:

$$a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

Donc:  $(\forall m \in \mathbb{N}) (a^{p-1})^m \equiv 1 [p]$ .

$$(\forall m \in \mathbb{N}) a^{(p-1)m} \equiv 1 [p]$$

2] a)  $7$  est premier et  $7$  ne divise pas  $p-1$ ;

$$\text{donc: } 7 \nmid (p-1) \Rightarrow 7 \nmid (p-1)m = 1$$

D'après le théorème de Bézout, on peut établir qu'il existe deux entiers naturels  $n$  et  $m$  tel que:  $7n - (p-1)m = 1$

Comme:  $a^{7n} \equiv 1 [p]$  et  $a^{(p-1)m} \equiv 1 [p]$ ,

alors:  $a^{7n} \equiv 1 [p]$  et  $a^{(p-1)m} \times a \equiv a [p]$

$$a^{7n} \equiv 1 [p] \text{ et } a^{1+(p-1)m} \equiv a [p]$$

Comme  $7n = 1 + (p-1)m$ , alors:

$$a \equiv 1 [p]$$

b) On a:  $(\forall d \in \mathbb{N}) a^d \equiv 1 [p]$

Donc:  $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 \equiv 7 [p]$

c'est-à-dire:  $A \equiv 7 [p]$

Or, par hypothèse,  $A \equiv 0 [p]$ , alors

$7 \equiv 0 [p]$ . Donc  $p \mid 7$ . Comme  $7$  et  $p$

sont premiers, alors:  $p = 7$

3]. Soit  $p$  un nombre premier positif impair tel que  $p$  divise  $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$ .  
 Deux cas se présentent:

1er cas:  $7$  divise  $p-1$

Dans ce cas, on a:  $p \equiv 1 [7]$

2e cas:  $7$  ne divise pas  $p-1$

D'après le résultat de 2], on a:  $p = 7$

• Donc:

Si  $p$  est un nombre premier positif impair qui divise  $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$ , alors:  $p \equiv 1 [7]$  ou  $p = 7$

(167) Un triplet d'entiers positifs  $(a; b; c)$  est dit  $n$ -puissant si  $a \leq b \leq c$  et  $a+b+c=1$  et  $a^n + b^n + c^n$  est divisible par  $a+b+c$ . Par exemple,  $(1; 2; 2)$  est 5-puissant.

1] Déterminer tous les triplets (s'il y en a) qui sont  $n$ -puissants pour tout  $n \geq 1$

2] Déterminer tous les triplets (s'il y en a) qui sont 2004-puissants et 2005-puissants mais pas 2007-puissants.

D'après Olympiade du Canada

### Solution

• Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons:  $u_n = a^n + b^n + c^n$ .

Soit le polynôme:  $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ .

On a:  $P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$ .

$P(a) = P(b) = P(c) = 0$ , donc:

$$\begin{cases} a^3 = (a+b+c)a^2 - (ab+bc+ca)a + abc \\ b^3 = (a+b+c)b^2 - (ab+bc+ca)b + abc \\ c^3 = (a+b+c)c^2 - (ab+bc+ca)c + abc \end{cases}$$

En multipliant ces relations respectivement par  $a^{n-3}$ ,  $b^{n-3}$  et  $c^{n-3}$  puis en additionnant, on obtient:

$$u_n = (a+b+c)u_{n-1} - (ab+bc+ca)u_{n-2} + abc u_{n-3}$$

pour tout  $n \geq 3$ .  
 Par conséquent si  $u_{n-2}$  et  $u_{n-3}$  sont divisibles par  $u_1 = a+b+c$ , alors  $u_n$  sera divisible par  $u_1$ .

Il s'ensuit que: Il n'existe aucun triplet qui soit 2004-puissant et 2005-puissant mais pas 2007-puissant. (c'est la réponse à la question 2)

• Tout triplet est 1-puissant.

• Soit  $(a; b; c)$  un triplet 2-puissant et 3-puissant.

○ On a:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab+bc+ca)(a+b+c) + 3abc$$

Comme  $(a; b; c)$  est 3-puissant, alors:

$$a+b+c \text{ divise } 3abc$$

$$\text{○ On a: } a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

Comme  $(a; b; c)$  est 2-puissant, alors:

$$a+b+c \text{ divise } 2(ab+bc+ca)$$

○ Supposons qu'un nombre premier  $p \geq 5$  divise  $a+b+c$ .

Alors:  $p$  divise  $3abc$ ; donc  $p$  divise  $abc$ .  
 Puisque  $a+b+c=1$ , alors  $p$  divise exactement un de  $a, b, c$ . Mais alors  $p$  ne divise pas  $2(ab+bc+ca)$ .

○ Supposons que 3 divise  $a+b+c$ .

Alors 3 divise  $abc$ ; donc 3 divise exactement un de  $a, b, c$ . Mais alors 3 ne divise pas



Supposons que  $2^c$  divise  $a+b+c$ .  
 Alors 4 divise  $abc$  (car  $4 \nmid 3=1$ )  
 Puisque  $a+b+c=1$ , alors un de  $a, b, c$   
 est pair; ce qui implique qu'un seul  
 de  $a, b, c$  est divisible par 4 et que les deux  
 autres sont impairs. Mais alors  $ab+bc+ca$   
 est impair; ce qui infère que 4 ne peut  
 diviser  $2(ab+bc+ca)$ .

Aut:  $a+b+c$  est divisible ni par 4, ni par 9,  
 ni par tout nombre premier supérieur à 3.

Puisque:  $a+b+c \geq 3$ , alors  $a+b+c \in \{3, 6\}$

En étudiant les différents cas qui se  
 présentent, on conclut alors que:

**Les seuls triplets  $n$ -puissants pour tout  
 entier  $n \geq 1$  sont  $(1; 1; 1)$  et  $(1; 1; 4)$**

Encore faut-il prouver par récurrence  
 que: Si  $(a; b; c)$  est  $2$ -puissant et  $3$ -puissant,  
 alors  $(a; b; c)$  est  $n$ -puissant pour tout  $n \geq 1$ .  
 Pour cela, on utilise la relation de  
 récurrence:

$$u_n = (a+b+c) u_{n-1} - (ab+bc+ca) u_{n-2} + abc u_{n-3}$$

satisfaite pour tout entier  $n \geq 3$

Autre solution

Soit  $p$  un nombre premier. D'après le théorème  
 de Fermat:

$a^{p-1} \equiv 1 [p]$  si  $p$  ne divise pas  $a$  et  $a^p \equiv 0 [p]$  si  $p$  divise  $a$

Puisque  $a+b+c=1$ , alors:

$$u_{p-1} \equiv 1 [p] \text{ ou } u_{p-1} \equiv 2 [3] \text{ ou } u_{p-1} \equiv 3 [p]$$

(on rappelle que  $u_n = a^n + b^n + c^n$ )

Soit  $p$  un nombre premier qui divise  $u_{p-1}$

Alors:  $p=2$  ou  $p=3$

Puis si  $(a; b; c)$  est  $n$ -puissant pour tout  $n \geq 1$ ,  
 les seuls diviseurs possibles de  $a+b+c$  sont  
 2 et 3.

De la même façon, 4 ne divise pas  $a+b+c$   
 et 9 ne divise pas  $a+b+c$ .

Par ailleurs:  $\begin{cases} a^2 \equiv 0 [4] \text{ si } p \text{ est pair} \\ a^2 \equiv 1 [4] \text{ si } p \text{ est impair} \end{cases}$

et  $a, b, c$  ne sont pas tous pairs;

donc:  $u_2 \equiv 1 [4]$  ou  $u_2 \equiv 2 [4]$  ou  $u_2 \equiv 3 [4]$

Autre part:  $\begin{cases} a^3 \equiv 0 [9] \text{ si } 3 \text{ divise } a \\ a^3 \equiv 1 [9] \text{ si } 3 \text{ ne divise pas } a \end{cases}$

et  $a, b, c$  ne sont pas tous divisibles par 3;

donc:  $u_3 \equiv 1 [9]$  ou  $u_3 \equiv 2 [9]$  ou  $u_3 \equiv 3 [9]$

Alors  $u_6$  n'est pas divisible par 4

et  $u_6$  n'est pas divisible par 9

Où, si  $(a; b; c)$  est  $n$ -puissant pour tout  $n \geq 1$ ,  
 alors  $a+b+c$  est divisible ni par 4, ni par 9.

Où  $a+b+c \in \{3; 6\}$

En traitant les différentes possibilités, on trouve  
 que  $(a; b; c) \in \{(1; 1; 1); (1; 1; 4)\}$

**(168)** Soit  $p$  un nombre premier positif impair.

Montrer que:

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} [p^2]$$

D'après olympiade du Canada

Solution

Potons  $S_p = \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1}$  et  $2q = p-1$  (car  $p-1$  est pair)

On a:

$$S_p = (1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + q^{p-1}) + ((q+1)^{p-1} + (q+2)^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1})$$

Donc:

$$S_p = (1^{p-1} + (q)^{p-1}) + (2^{p-1} + (q-1)^{p-1}) + \dots + (q^{p-1} + (q+1)^{p-1})$$

$$S_p = (1^{p-1} + (p-1)^{p-1}) + (2^{p-1} + (p-2)^{p-1}) + \dots + (q^{p-1} + (p-q)^{p-1})$$

$$S_p = \sum_{k=1}^q (k^{p-1} + (p-k)^{p-1})$$

Par la formule du binôme de Newton, on a:

$$(p-k)^{p-1} = p^{p-1} - \dots - C_{p-1}^1 p^{p-2} k + C_{p-1}^2 p^{p-3} k^2 - \dots + k^{p-1}$$

Donc:

$$k^{p-1} + (p-k)^{p-1} \equiv k^{p-1} + C_{p-1}^1 p^{p-2} k - k^{p-1} [p^2]$$

Par suite

$$k^{p-1} + (p-k)^{p-1} \equiv (2p-1) p^{p-2} k [p^2]$$

Par ailleurs, pour tout  $k \in \{1; 2; \dots; p-1\}$ ,

$k \nmid p=1$  et par suite, par le théorème de  
 Fermat: Pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k < p$ , on a:

$$k^{p-1} \equiv 1 [p]$$

$$\text{Donc: } (k^{p-1})^k \equiv 1 [p] \quad (1 \leq k < p)$$

$$k^{p-1} \equiv 1 [p]$$

$$\text{et } (2p-1) k^{p-1} \equiv 2p-1 \equiv -1 [p]$$

On peut donc écrire:

$$(2p-1) k^{p-1} = mp-1, \text{ où } m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc: } (2p-1) p^{p-2} k = mp^{p-1}$$

$$\text{et par suite } (2p-1) p^{p-2} k = -p [p^2]$$

On en déduit:

$$S_p \equiv \sum_{k=1}^{p-1} (-p) \equiv -p(p-1) \equiv \frac{p(p+1)}{2} [p^2]$$

$$\text{Où: } \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} [p^2] \quad (p \text{ premier impair})$$